תורת המשחקים השיתופיים

תרגיל בית 6

עומר מדמון
313329666

תהי N קבוצת שחקנים במשחק שיתופי. אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{B}$ ייקרא מאוזן אם קיים וקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ כך ש $\delta_S > 0$ לכל $S \in \mathcal{B}$ ומתקיים לכל $i \in N$,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}:i\in S} \delta_S = 1.$$

בכתה הצגנו את משפט שפלי בונדרבה האומר כי הליבה של משחק (N,V) אינה ריקה אמ"ם לכל אוסף מאוזן $\mathcal{B}$ ווקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ מתקיים ש,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \delta_S V(S) \le V(N).$$

1. נתון משחק שיתופי (N,V) כאשר $N = \{1,2,3\}$. נניח כי תנאי בונדרבה שפלי מתקיים לאוספים המאוזנים $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$ $\{\{3\},\{1,2\}\}$ ו $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. (שימו לב כי לאוספים הנ"ל וקטור מאזן יחיד!).

ראשית, נכתוב את הוקטור המאזן (היחיד) שמתאים לכל אוסף מאוזן:

$\mathcal{B}$	δ
$\{1\},\{2\},\{3\}$	$\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = 1$
$\{1\},\{2,3\}$	$\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2,3\}} = 1$
$\{2\},\{1,3\}$	$\delta_{\{2\}} = \delta_{\{1,3\}} = 1$
$\{3\},\{1,2\}$	$\delta_{\{3\}} = \delta_{\{1,2\}} = 1$
$\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$	$\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{2,3\}} = \delta_{\{1,3\}} = \frac{1}{2}$

מהנתון שתנאי BS מתקיים עבור אוספים מאוזנים אלה,

נסיק כי:

(1) $V(1)+V(2)+V(3) \leq V(N)$

(2) $V(1)+V(2,3) \leq V(N)$

(3) $V(2)+V(1,3) \leq V(N)$

(4) $V(3)+V(1,2) \leq V(N)$

(5) $V(1,2)+V(2,3)+V(1,3) \leq 2V(N)$

א. הראו כי אם $V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) \geq V(N) + V(\{1\})$ אזי הווקטור

$$(V(\{1,2\}) + V(\{1,3\}) - V(N), V(N) - V(\{1,3\}), V(N) - V(\{1,2\}))$$

נימצא בליבה.

כעת נניח כי גם מתקיים

(6) $V(1,2)+V(1,3) \geq V(N)+V(1)$

נראה כי הוקטור

$$X = \big(V(1,2)+V(1,3)-V(N),\ V(N)-V(1,3),\ V(N)-V(1,2)\big)$$

בליבה.

רציפות, מתקיים ישירות:

$$X_1+X_2+X_3 = \cancel{V(1,2)}+\cancel{V(1,3)}-\cancel{V(N)}$$
$$+V(N)-\cancel{V(1,3)}+\cancel{V(N)}-\cancel{V(1,2)} = V(N)$$

כעת נראה סבירות קואליציונית:

$$\forall \emptyset \neq S \subseteq N: \ x(S) \geq v(S)$$

עבור קואליציות בגודל 1:

$$x(1) = v(1,2) + v(1,3) - v(N) \geq v(1) \iff$$
$$v(1,2) + v(1,3) \geq v(N) + v(1)$$

וזה נכון מתנאי (6).

$$x(2) = v(N) - v(1,3) \geq v(2) \iff$$
$$v(N) \geq v(2) + v(1,3)$$

וזה נכון מתנאי (3)

$$x(3) = v(N) - v(1,2) \geq v(3) \iff$$
$$v(N) \geq v(3) + v(1,2)$$

וזה נכון מתנאי (4)

עבור קואליציות בגודל 2:

$$x(1,2) = v(1,2) + v(1,3) - v(N) + v(N) - v(1,3)$$
$$= v(1,2) \geq v(1,2)$$

אכן מתקיים (בשוויון).

$$X(2,3) = V(N) - V(1,3) + V(N) - V(1,2)$$

$$= 2V(N) - V(1,2) - V(1,3)$$

$$\underset{(5)}{\geq} V\cancel{(1,2)} + V(2,3) + V\cancel{(1,3)} - V\cancel{(1,2)} - V\cancel{(1,3)}$$

$$= V(2,3)$$

$$X(1,3) = V\cancel{(1,2)} + V(1,3) - V\cancel{(N)} + V\cancel{(N)} - V\cancel{(1,2)}$$

$$= V(1,3) \geq V(1,3)$$

אכן מתק"ים (בשוויון).

עבור קואליציות בגודל 3 התנאי מתק"ים בשוויון (משוואות).

ב. הראו כי אם $V(\{1,2\})+V(\{1,3\})<V(N)+V(\{1\})$ ו $V(\{1,3\})\geq V(\{1\})+V(\{3\})$ אזי הווקטור $(V(\{1\}),V(N)-V(\{1,3\}),V(\{1,3\})-V(\{1\}))$ נימצא בליבה.

כעת התנאים הנוספים לתנאים (1)-(5) הם תנאים (6)-(7):

$$(1)\quad V(1)+V(2)+V(3)\leq V(N)$$
$$(2)\quad V(1)+V(2,3)\leq V(N)$$
$$(3)\quad V(2)+V(1,3)\leq V(N)$$
$$(4)\quad V(3)+V(1,2)\leq V(N)$$
$$(5)\quad V(1,2)+V(2,3)+V(1,3)\leq 2V(N)$$
$$(6)\quad V(1,2)+V(1,3)< V(N)+V(1)$$
$$(7)\quad V(1,3)\geq V(1)+V(3)$$

נראה כי הוקטור

$$X=\big(V(1),\,V(N)-V(1,3),\,V(1,3)-V(1)\big)$$

בליבה.

רציונליות, ויעילות מתקיים:

$$X_1+X_2+X_3=$$
$$\cancel{V(1)}+V(N)-\cancel{V(1,3)}+\cancel{V(1,3)}-\cancel{V(1)}=V(N)$$

סבירות קואליציות עבור קואליציות בגודל 1:

$$X(1) = V(1) \geq V(1)$$

מתקיים בשוויון.

$$X(2) = V(N) - V(1,3) \geq V(2) \iff$$

$$V(N) \geq V(2) + V(1,3)$$

זהו נכון מתנאי (3).

$$X(3) = V(1,3) - V(1) \geq V(3)$$

ישירות מתנאי (7).

סבירות קואליציות עבור קואליציות בגודל 2:

$$X(1,2) = V(1) + V(N) - V(1,3)$$

$$\underset{(6)}{\geq} V(1,2) + V(1,3) - V(1,3) = V(1,2)$$

$$X(2,3) = V(N) - V(1,3) + V(1,3) - V(1)$$

$$= V(N) - V(1) \underset{(2)}{\geq} \cancel{V(1)} + V(2,3) - \cancel{V(1)}$$

$$= V(2,3)$$

$$X(1,3) = V(1) + V(1,3) - V(1) = V(1,3) \geq V(1,3)$$

מתקיים בשוויון.

עבור קואליציות בגודל 3 התנאי מתקיים בשוויון (מיטוליות).

ג. הראו כי אם $V(\{1,2\})+V(\{1,3\})<V(N)+V(\{1\})$ ו $V(\{1,3\})<V(\{1\})+V(\{3\})$ אזי הווקטור $(V(\{1\}),V(N)-V(\{1\})-V(\{3\}),V(\{3\}))$ נימצא בליבה. לכן ניתן להסיק כי במשחקים עם שלושה שחקנים מספיק לבדוק עם תנאי שפלי-בונדרבה מתקיים רק לארבעת האוספים הנ"ל בכדי לדעת עם הליבה ריקה או לא.

כזכור התנאים הנוספים לתנאים (1)-(5) הם תנאים (6)-(7):

$$(1)\quad V(1)+V(2)+V(3)\leq V(N)$$
$$(2)\quad V(1)+V(2,3)\leq V(N)$$
$$(3)\quad V(2)+V(1,3)\leq V(N)$$
$$(4)\quad V(3)+V(1,2)\leq V(N)$$
$$(5)\quad V(1,2)+V(2,3)+V(1,3)\leq 2V(N)$$
$$(6)\quad V(1,2)+V(1,3)< V(N)+V(1)$$
$$(7)\quad V(1,3)< V(1)+V(3)$$

נראה כי הוקטור

$$X=\big(V(1),\ V(N)-V(1)-V(3),\ V(3)\big)$$

בליבה.

ראשית, יעילות מתקיים:

$$X_1+X_2+X_3=\cancel{V(1)}+V(N)-\cancel{V(1)}-\cancel{V(3)}+\cancel{V(3)}$$
$$=V(N)$$

סבירות קבוצתית עבור קואליציות בגודל 1:

$$X(1)=V(1),\quad X(3)=V(3)$$

מתקיימים בשוויון. עבור שחקן 2:

$$X(2)=V(N)-V(1)-V(3)\underset{(1)}{\geq} \cancel{V(1)}+V(2)+\cancel{V(3)}-\cancel{V(1)}-\cancel{V(3)}=V(2)$$

סבירות קבוצתית עבור קואליציות בגודל 2:

$$X(1,2)=V(1)+V(N)-V(1)-V(3)$$
$$=V(N)-V(3)\underset{(4)}{\geq} V(1,2)$$

$$X(2,3)=V(3)+V(N)-V(1)-V(3)$$
$$V(N)-V(1)\underset{(2)}{\geq} V(2,3)$$

$$X(1,3)=V(1)+V(3)\underset{(7)}{>} V(1,3)$$

עבור קואליציית בגודל 3 התנאי "מתקיים" בשוויון (מיעילות).

2. משחק שיתופי (N,V) ייקרא סימטרי אם קיימת פונקציה $v:\{1,\dots,n\}\to R$ כך שלכל קואליציה $S\subseteq N$ לא ריקה, $V(S)=v(|S|)$. כלומר הערך של כל קואליציה תלוי רק בגודלה.

א. הראו כי אם,

$$V(S)\le \frac{|S|}{n}V(N)$$

לכל קואליציה לא ריקה S אזי הליבה של המשחק (N,V) אינה ריקה.

(הראו כי הווקטור $\left(\frac{V(N)}{n},\dots,\frac{V(N)}{n}\right)$ הינו בליבה).

קל לראות שהוקטור $x=\left(\frac{V(N)}{n},\dots,\frac{V(N)}{n}\right)$ מקיים יעילות, כעת נראה שהוא גם מקיים סבירות קבוצתית:

תהי $\emptyset\neq S\subseteq N$ קואליציה לא ריקה כלשהי. אזי:

$$x(S)=|S|\frac{V(N)}{n}\underset{\text{נתון}}{\geq} V(S)$$

ב. (רשות) הראו בעזרת שפלי בונדרבה או בכל דרך אחרת גם את הכיוון ההפוך. כלומר הראו כי אם הליבה של משחק (N,V) לא ריקה, אזי אי-השיוויון מתקיים.

תהי N קבוצת שחקנים במשחק שיתופי. אוסף של תתי קבוצות $\mathcal{B}$ ייקרא מאוזן אם קיים וקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ כך ש $\delta_S > 0$ לכל $S\in\mathcal{B}$ ומתקיים לכל $i\in N$,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}:i\in S}\delta_S = 1.$$

בכתה הצגנו את משפט שפלי בונדרבה האומר כי הליבה של משחק (N,V) אינה ריקה אמ"ם לכל אוסף מאוזן $\mathcal{B}$ ווקטור מאזן $\{\delta_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ מתקיים ש,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}}\delta_S V(S)\le V(N).$$

נתון שהליבה ריקה, ומכאן נובע כי

תנאי בונדרבה שפלי מתקיים, בפרט עבור האוסף המאוזן B_k שהוא אוסף ה הקואליציות בגודל k (עבור $k=1,\dots n$).

ראינו בכיתה כי וקטור מאזן ל B_k הוא

$$\left(\delta_S=\binom{n-1}{k-1}^{-1}\right)_{S\in B_k}$$

ולכן מתקיים שלכל $k=1..n$:

$$\sum_{S\in B_k}\delta_S V(S)\overset{\text{המשחק סימטרי}}{=}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}^{-1}V(k)=$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!}V(k)=\frac{n}{k}V(k)\le V(N)$$

$$\Updownarrow$$

$$V(k)\le\frac{k}{n}V(N)$$

3. יהי (N,V) משחק שיתופי ויהי $x \in C(N,V)$ איבר בליבה של המשחק.
הראו כי לכל שחקן $i \in N$ <u>קיימת</u> קואליציה $S \subseteq N \setminus \{i\}$ שאינה מכילה את שחקן i, עבורה $x_i \le V(S \cup \{i\}) - V(S)$

לכל $i \in N$ מתקיים:

$$X(N) = X(\{i\}) + X(N \setminus \{i\})$$

מיעילות הוקטור x מתקיים:

$$V(N) = X(\{i\}) + X(N \setminus \{i\})$$
$$X(\{i\}) = V(N) - X(N \setminus \{i\})$$

ומסבירות קואליציונית מתקיים $X(N \setminus \{i\}) \ge V(N \setminus \{i\})$

כלומר,

$$X(\{i\}) \le V(N) - V(N \setminus \{i\})$$

כעת, נבחר $S = N \setminus \{i\}$ ונקבל

$$X_i \le V(S \cup \{i\}) - V(S)$$

כנדרש.