תורת המשחקים השיתופיים

תרגיל בית 7

עומר מזמין
313329666

1. מצאו את המשחק השיתופי הנגזר מהשוק הבא:

$$,a^1 = (1,0),\ a^2 = (0,1),\ a^3 = (1,1,)\ ,\quad l = 2 \quad N = \{1,2,3\}$$

$$u^1(x) = x_1 + x_2,$$

$$u^2(x) = 2x_1 + \sqrt{x_2},\ \ u^3(x) = 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

$$V(1) = u_1(a_1) = 1 + 0 = 1$$

$$V(2) = u_2(a_2) = 2 \cdot 0 + \sqrt{1} = 1$$

$$V(3) = u_3(a_3) = 2 \cdot \sqrt{1} + \sqrt{1} = 3$$

$$V(1,2) = \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} \left\{ u_1(x,y) + u_2(1-x, 1-y) \right\}$$

$$= \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} \left\{ x + y + 2(1-x) + \sqrt{1-y} \right\} =$$

$$x + y + 2 - 2x + \sqrt{1-y}$$

$$= \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} \left\{ 2 - x + y + \sqrt{1-y} \right\}$$

מקסימום מתקבל ב $x=0$

$$= \max_{0 \le y \le 1} \left\{ 2 + y + \sqrt{1-y} \right\}$$

$$= 3{,}25$$

$$f(y) = 2 + y + \sqrt{1-y}$$

$$f'(y) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-y}} = 0$$

$$2\sqrt{1-y} = 1$$

$$\sqrt{1-y} = 1/2$$

$$1 - y = 1/4$$

$$y^* = 3/4$$

$$f(y^*) = 2 + \tfrac{3}{4} + \sqrt{\tfrac{1}{4}}$$

$$= 3{,}25$$

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = 3$$

$$V(1,3) = \max_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1}} \left\{ u_1(x,y) + u_3(2-x, 1-y) \right\}$$

$$= \max_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1}} \left\{ x + y + 2\sqrt{2-x} + \sqrt{1-y} \right\}$$

$$= \max_{0\le x\le 2} \left\{ x + 2\sqrt{2-x} \right\}$$

ספרביליות

$$+ \max_{0\le y\le 1} \left\{ y + \sqrt{1-y} \right\}$$

עבור בעיית האופטימיזציה של y: הפתרון היא בדיוק

כמו ב $V(1,2)$ והו $y^* = 3/4$.

$$f(3/4) = 3/4 + \sqrt{1/4} = 1.25$$

$$f(0) = 0 + \sqrt{1} = 1$$

$$f(1) = 1 + \sqrt{0} = 1$$

ולגבי אין המקסימום, לכן:

$$= 1.25 + \max_{0 \le x \le 2} \left\{ x + 2\sqrt{2-x} \right\}$$

$$= 1.25 + 3 = 4.25$$

$$f(x) = x + 2\sqrt{2-x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = 0$$

$$\sqrt{2-x} = 1$$

$$2 - x = 1$$

$$x^{*} = 1$$

$$f(0) = 2\sqrt{2}$$

$$f(x^{*}) = f(1) = 1 + 2 = 3 > 2\sqrt{2}$$

$$f(2) = 2$$

$$V(2,3) = \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2}} \left\{ u_2(x,y) + u_3(1-x, 2-y) \right\}$$

$$= \max_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2}} \left\{ 2x + \sqrt{y} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{2-y} \right\}$$

$$= \max_{0 \le x \le 1} \left\{ 2x + 2\sqrt{1-x} \right\}$$

$$+ \max_{0 \le y \le 2} \left\{ \sqrt{y} + \sqrt{2-y} \right\}$$

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{1-x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{2\sqrt{1-x}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

$$\sqrt{1-x} = 1/2 \Rightarrow 1 - x = 1/4$$

$$\Rightarrow x^* = 3/4$$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(1) = 2$$

$$f(x^*) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2.5$$

$$= 2.5 + \max_{0 \le y \le 2} \left\{ \sqrt{y} + \sqrt{2-y} \right\}$$

$$f(y) = \sqrt{y} + \sqrt{2-y}$$

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{2-y}} = 0$$

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{2-y} \Rightarrow y = 2-y$$

$$\Rightarrow y^* = 1 \quad ; \quad f(0) = f(2) = \sqrt{2}$$

$$f(y^*) = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

$$= 2.5 + 2 = 4.5$$

$$V(1,2,3) \overset{\text{ספרביליות}}{=} \max_{\substack{0\le x,y,z\\ x+y+z=2}} \left\{x+2y+2\sqrt{z}\right\}$$

$$+\max_{\substack{0\le x,y,z\\ x+y+z=2}} \left\{x+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right\} =$$

נשים לב כי תמיד עדיף לתת לשחקן 2 את משאבי 1
ספקי שחקן 1, ולכן:

$$\max_{\substack{0\le x,y,z\\ x+y+z=2}} \left\{x+2y+2\sqrt{z}\right\} = \max_{\substack{0\le y,z\\ y+z=2}} \left\{2y+2\sqrt{z}\right\}$$

$$= \max_{0\le y\le 2} \left\{2y+2\sqrt{2-y}\right\} = 4.5$$

פתרון בע"ת האופטימיזציה הרציפה:

$$f(y) = 2y + 2\sqrt{2-y}$$

$$f'(y) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2-y}} = 0$$

$$\sqrt{2-y} = 1/2 \Rightarrow 2-y = 1/4$$

$$\Rightarrow y^{\circ} = 1.75$$

$$f(0) = 2\sqrt{2} \, , \quad f(2) = 4$$

$$f(y^{\circ}) = 2 \cdot 1.75 + 2\sqrt{1/4} = 4.5$$

סעיף,

$$V(1,2,3) = 4.5 + \max_{\substack{0 \le x,y,z \\ x+y+z=2}} \left\{ x + \sqrt{y} + \sqrt{z} \right\}$$

$$4.5 + \max_{0 \le x \le 2} \max_{0 \le y \le 2-x} \left\{ x + \sqrt{y} + \sqrt{2-x-y} \right\}$$

כאשר נקבע X,

$$f(y) = x + \sqrt{y} + \sqrt{2-x-y}$$

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x-y}} = 0$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{2-x-y}$$

$$y = 2-x-y$$

$$y = \frac{2-x}{2}$$

$$= 4.5 + \max_{0\le x\le 2}\left\{x + \sqrt{\frac{2-x}{2}} + \sqrt{\underbrace{2-x-\left(\frac{2-x}{2}\right)}_{=\frac{2-x}{2}}}\right\}$$

$$= 4.5 + \max_{0\le x\le 2}\left\{x + \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-x}\right\}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2-x}} = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-x} = 1$$

$$\sqrt{4-2x} = 1$$

$$x^{\circ} = 1.5$$

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = 2$$

$$f(x^{\circ}) = 2.5$$

$$= 4.5 + 2.5 = 7$$

2. לכל קבוע c נגדיר משחק שיתופי עם שלושה שחקנים באופן הבא:

$$v(1)=\frac{1}{2}\,; v(2)=v(3)=0; v(1,2)=c; v(1,3)=v(2,3)=1$$

$$v(1,2,3)=2$$

לפי משפט שהוזכר בכתה משחק הינו נגזר משוק אמ"ם המשחק הינו מאוזן לחלוטין. כלומר הליבה של כל תת משחק שלו אינה ריקה. מצאו עבור אילו ערכים של c המשחק נגזר שוק.

נמצא את c עבורו הליבה אינה ריקה לכל תת משחק:

עבור תתי המשחקים $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ הליבה לא ריקה כי אלו משחק שיתופי עם שחקן יחיד.

עבור תת המשחק $\{1,3\}$ הוקטור $X=(1/2,1/2)$ נמצא בליבה:

$X(\{1\})=V(\{1\})=1/2$

$X(\{3\})=1/2>0=V(\{3\})$

$X(\{1,3\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=V(\{1,3\})$

עבור תת המשחק $\{2,3\}$ הוקטור $X=(1/2,1/2)$ נמצא בליבה:

$X(\{2\})=1/2>0=V(\{2\})$

$X(\{3\})=1/2>0=V(\{3\})$

$X(\{1,3\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=V(\{1,3\})$

עבור את המשחק $G : \{1,2\}$ וקטור x קיים.
אמ"מ הוא מקיים:

$$(1) \quad X_1 \geq 1/2$$

$$(2) \quad X_2 \geq 0$$

$$(3) \quad X_1 + X_2 = C$$

עבור $C < 1/2$ אז קיים וקטור כזה, כי מ-(3)
ו-(1) נובע כי $X_2 < 0$, בסתירה ל-(2).

עבור $C \geq 1/2$ הוקטור $X = (1/2, C - 1/2)$ מקיים
את התנאים ולכן בליבה, ולכן הליבה לא ריקה.

עבור המשחק $\{1,2,3\}$ התנאים הבאים הם הכרחיים ומספיקים
לאי ריקות הליבה (תרגיל בית 6, שאלה 1):

$$(1) \quad V(1) + V(2) + V(3) \leq V(N)$$

$$(2) \quad V(1) + V(2,3) \leq V(N)$$

$$(3) \quad V(2) + V(1,3) \leq V(N)$$

(4) $V(3) + V(1,2) \leq V(N)$

(5) $V(1,2) + V(2,3) + V(1,3) \leq 2V(N)$

בדיקה:

✓ (1) $\frac{1}{2} + 0 + 0 \leq 2$

✓ (2) $\frac{1}{2} + 1 \leq 2$

✓ (3) $0 + 1 \leq 2$

? (4) $0 + C \leq 2$

? (5) $C + 1 + 1 \leq 2 \cdot 2 \iff 2 + C \leq 4$

$\iff C \leq 2$

כלומר בסה״כ הליבה לא ריקה עבור $C \leq 2$.
בנוסף, גם הליבה של [illegible] המשחק אינה
ריקה רק עבור ערכי C המקיימים $C \geq \frac{1}{2}$
ולכן $C \leq 2$, כלומר $\frac{1}{2} \leq C \leq 2$.

3. יהיו L ו R שתי קבוצות שחקנים זרות (כלומר אין אף שחקן שנימצא בשתי הקבוצות) שתיהן מגודל k. נניח כי לכל שחקן ב L ישנה כפפה שמאלית ולכל שחקן ב R יש כפפה ימנית. נגדיר משחק שיתופי בו קבוצת השחקנים היא $L \cup R$ והערך לכל קואליציה $S \subseteq L \cup R$ נקבע על ידי מספר הזוגות של כפפות (כל זוג מורכב מכפפה שמאלית וימנית) שברשות חברי קואליציה S.

א. רשמו במפורש את השווי של כל קואליציה S.

ב. הראו שהמשחק הינו מאוזן לחלוטין. רמז: הראו שלכל תת משחק שבו יש רוב (חלש) לבעלי כפפה שמאלית הווקטור שנותן תשלום של 1 לבעלי כפפה ימנית ו 0 לשאר השחקנים נימצא בליבה.

א)

$$V(S) = \min\{|S\cap R|, |S\cap L|\}$$

הסבר: מס' הכפפות הימניות בקואליציה S הוא $|S\cap R|$ כיוון שלכל שחקן ב R יש כפפה ימנית אחת. באופן דומה, מס' הכפפות השמאליות הוא $|S\cap L|$. לכן מס' הזוגות בקואליציה הוא המינימום בין מס' הכפפות הימניות והשמאליות, כלומר $\min\{|S\cap R|, |S\cap L|\}$.

ב) ממשפט שראינו בהרצאה, משחק הוא מאוזן לחלוטין אמ"מ הוא משחק שוק, לכן מספיק להראות שהמשחק הנ"ל נגזר שוק.

נגדיר שוק $(N, \ell, \{a_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$

באופן הבא:

$\ell = 2$ (left & right gloves)

$$a_i = \begin{cases} (0,1) & i\in R \\ (1,0) & i \in L \end{cases}$$

$$\forall i: \quad u_i(x) = u(x) = \min\{x(1), x(2)\} = \min\{x^T e_1, x^T e_2\}$$

(הקורדינטה המינימלית @ x)

נותר להראות: (1) u קעורה,

$$\forall S: \quad \max_{x\in X_S} \sum_{i\in S} u_i(x) = v(S) \quad (2)$$

<u>הוכחה 1:</u> הפונקציות $\forall j\in\{1,2\}: g_j(x) = x^T e_j$

לינאריות ולכן קעורות, והמינימום @ פונ' קעורות הוא

פונ' קעורה, לכן u פונ' קעורה.

<u>הוכחה 2:</u> נשים לב כי לכל $S \neq \emptyset$:

$$X^S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times n} : \sum_{i \in S} X_i = \sum_{i \in S} a_i \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times n} : \sum_{i \in S} X_i(1) = |S \cap L|, \right.$$

$$\left. \sum_{i \in S} X_i(2) = |S \cap R| \right\}$$

מהגדרת a_i

סה"כ

$$\max_{x \in X_S} \sum_{i \in S} u(x_i) = \max_{x \in X^S} u\left(\sum_{i \in S} x_i\right)$$

מקסימום של הפונקציה

$$u(x) = \min\{x^T e_1, x^T e_2\}$$

$$= \max_{x \in X^S} u\left(\begin{pmatrix} |S \cap R| \\ |S \cap L| \end{pmatrix}^T\right)$$

$$= \min\{|S\cap R|, |S\cap L|\}$$

ולכן החסם מתקבל עבור

$$x = (a_i)_{i\in S} \in X^S$$

ולכן אכן מתקיים

$$\max_{x\in X_S} \sum_{i\in S} u_i(x) = \min\{|S\cap R|, |S\cap L|\} = v(S)$$

סיכום, המשחק אינו נוגד שין ולכן מאוזן המהלך.

4. משחק (N,V) יקרא קמור אם לכל שתי קואליציות $S,T \subseteq N$:

$$V(S)+V(T) \le V(S\cap T)+V(S\cup T)$$

הראו בעזרת אינדוקציה על מספר השחקנים n או בכל דרך אחרת כי משחק קמור הינו מאוזן לחלוטין.

ראשית, נשים לב שלכל $T \neq \emptyset$, המשחק המצומצם (T, V_T) הוא גם קמור. לכן אם נראה שכל משחק קמור (N,V) קיים וקטור בליבה של (N,V), אזי נקבל שהמשחק מאוזן לחלוטין, כי זה יהיה תקף גם לכל תת משחק.

נסמן $\forall k\in[n]: S_k = \{1,\dots k\}$

ונגדיר $x \in X$ כך ש:

$$\forall i\in[n]: \quad x_i = V(S_i) - V(S_{i-1})$$

כאשר $S_0 = \emptyset$. נשים לב ש x יעיל

וכמובן:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} V(S_i) - V(S_{i-1}) =$$

טור טלסקופי

$$= V(S_n) - V(S_0) = V(N) - \underbrace{\cancel{V(\emptyset)}}_{=0}$$

יהי $\emptyset \neq S = \{i_1, \dots i_k\}$, $k = |S|$.

נראה שמתקיים סבירות קבוצתית:

$$X(S) = \sum_{i \in S} X_i = \sum_{j=1}^{k} V(S_{i_j}) - V(S_{i_j - 1})$$

$$\overset{(*)}{\geq} \sum_{j=1}^{k} V(\{i_1, \dots i_j\}) - V(\{i_1, \dots i_j - 1\})$$

$$= V(\{i_1, \dots i_k\}) - V(\emptyset) = V(S)$$

סכום טלסקופי

לכן $X \in C(N,v)$. כלומר, לכל (N,v) קמור
יש ליבה לא ריקה, לכל תת משחק (T, V_T) של (N,v)
(הוא גם קמור, ולכן בסה"כ הליבה של כל תת משחק
לא ריקה, כלומר משחק (N,v) קמור הוא מאוזן תמיד.

הוכחת (*):

$$S_{i_j} = \{1, \dots, i_j\} \qquad S_{i_j-1} = \{1, \dots, i_j - 1\}$$

$$T_{i_j} = \{i_1, \dots, i_j\} \qquad T_{i_j-1} = \{i_1, \dots, i_{j-1}\}$$

ברור כי $T_{i_j} \subseteq S_{i_j}$ ו- $T_{i_j-1} \subseteq S_{i_j-1}$.

נסמן $R = \{i_j\}$, מהגדרת תנאי הקמירות

אז S_{i_j-1} ו- T_{i_j} מקיימים:

$$V(S_{i_j-1}) + V(T_{i_j}) \le V(S_{i_j-1} \cap T_{i_j}) + V(S_{i_j-1} \cup T_{i_j})$$

$$= V(T_{i_j-1}) + V(S_{i_j})$$

$$\Rightarrow V(T_{i_j}) - V(T_{i_j-1}) \le V(S_{i_j}) - V(S_{i_j-1})$$

$\blacksquare$