תורת המשחקים השיתופיים

תרגיל בית 9

עומר מדמון
313329666

1. נניח ש (N,V) משחק שיתופי עם ליבה לא ריקה, ונניח ששחקנים j ו i סימטריים. הראו שקיים בליבה איבר y כך ש $y_i = y_j$. רמז: אם x ו z בליבה אזי גם $(x+z)/2$ בליבה.

מהנתון, לכל $S \subseteq N\setminus\{i,j\}$ מתקיים:

$$V(S\cup\{i\}) = V(S\cup\{j\})$$

(הגדרת שחקנים סימטריים). יהי $x\in C$ בליבה.

כעת נגדיר $z\in\mathbb{R}^n$ באופן הבא:

$$z_k = \begin{cases} x_k & k\neq i,j \\ x_j & k=i \\ x_i & k=j \end{cases}$$

כלומר, החלפנו את x_i ו- x_j בוקטור z (נשים לב כי אם $x_i = x_j$ אז $x=z$ אבל זה לא יפריע לנו). נראה כי $z\in C$:

יעילות:

$$z(N)=\sum_{k=1}^{n} z_k = z_i + z_j + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} z_k$$

$$= x_j + x_i + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k = v(N)$$

סבירות קואליציונית: לכל $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$ מתקיים

$x(S)=z(S)$, ולכן $x(S)\geq v(S)$ כזכור

$z(S)\geq v(S)$. גם עבור $S\subseteq N$

המק"ים $\{i,j\}\subseteq S$ הנ"ל מתקיים כיוון

ש $z(S)=x(S)$. (נסמן) זה קורה כאשר רק אחד

מבין $\{i,j\}$ שייך ל- S, בה"כ: $i\in S$

וגם $j\notin S$:

$$z(S)=z_i+\sum_{k\in S\setminus\{i\}} z_k = z_i + z(S\setminus\{i\})$$

$$= z_i + x(S\setminus\{i\}) = x_j + x(S\setminus\{i\})$$

$$= x(S\setminus\{i\}\cup\{j\}) \geq v(\underbrace{S\setminus\{i\}}_{\text{קבי אין } i \text{ ואין } j}\cup\{j\})$$

$$= V(S \setminus \{i\} \cup \{i\}) = V(S)$$

i,j סימטריים

כלומר z מקיים יעילות וסבירות קבוצתית ולכן $z \in C$.

כעת מקמירות הליבה, מתקיים שגם $y = \frac{1}{2}(x+z) \in C$. ובנוסף:

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + z_i) = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$$

$$y_j = \frac{1}{2}(x_j + z_j) = \frac{1}{2}(x_j + x_i)$$

$$\Rightarrow y_i = y_j$$

כנדרש.

$\square$

2. נניח ש (N,V) משחק שיתופי שבו כל $V(S)$ אי שלילי. יהי i שחקן 0. הראה כי לכל x בליבה $x_i = 0$.

נתון כי לכל $\phi \neq S \subseteq N$: $V(S) \geq 0$.
i שחקן אפס, כלומר לכל $S \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$V(S \cup \{i\}) = V(S)$$

יהי $x \in C$ בליבה.

מסתכלים קואליציה עבור $S = N \setminus \{i\}$ מתקיים:

$$x(N \setminus \{i\}) \geq V(N \setminus \{i\}) \underset{i \text{ שחקן אפס}}{=} V(N)$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n = V(N)$$

אך מיעילות מתקיים גם $\sum_{k=1}^{n} x_k = V(N)$

ולכן בהכרח מתקיים $x_i = 0$.

$\square$

3. משחק רוב משוכלל עם n שחקנים מוגדר ע"י וקטור של $n+1$ מספרים אי שליליים $[q; w_1, \dots, w_n]$. כאשר w_i זוהי המשקולת של שחקן i. הערך של קואליציה S הינו 1 אמ"ם סכום המשקולות של חבריה גדול מ q, אחרת הערך של S הינו 0.

כלומר:

$$V(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i\in S} w_i \ge q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

חשבו את ערך שפלי של כל אחד מהשחקנים, בכל אחד מהמשחקים הבאים:

א. (i) [5;1,1,3] (ii) [3;1,2,4] .

משחק (i):

עבור שחקן 3, הקואליציה היחידה בה התרומה השולית שלו תהיה 1 ולא 0 היא הקואליציה $\{1,2\}$.

הסידורים שמתאימים לקואליציה זו הם $(1,2,3), (2,1,3)$

לכן ערך שפלי של שחקן 3 הינו $\frac{1}{3!}\cdot 2 = \frac{1}{3}$.

שחקנים 1 ו-2 סימטריים לכן $\phi_1 = \phi_2 = \alpha$, ויעילות

מתקיים $V(N) = 2\alpha + \phi_3$

$2\alpha = V(N) - \phi_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\alpha = 1/3$

לכן: $\phi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

משחק (ii): . [3;1,2,4] (ii)

עבור שחקן 1, הקואליציה היחידה בה התרומה השולית שלו היא 1 ולא 0 היא $\{2\}$. הסדר היחיד המתאים לקואליציה זו הוא $(2,1,3)$, ולכן ערך שפלי של שחקן 1 הוא $\phi_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

עבור שחקן 2, הקואליציה היחידה בה התרומה השולית שלו היא 1 ולא 0 היא $\{1\}$. הסדר היחיד המתאים לקואליציה זו הוא $(1,2,3)$, ולכן ערך שפלי של שחקן 2 הוא $\phi_2 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

ע"פ יעילות צריך להתקיים $\phi_1+\phi_2+\phi_3=1$, כלומר $\phi_3 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. לכן בסה"כ:

$$\phi = \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}\right).$$

4. מצאו מושג פתרון φ השונה מערך שפלי ומקיים יעילות סימטריה ושחקן אפס.

עבור משחק קואליציוני $v \in V$ על N, נסמן

ב $Z(v)$ את קב' שחקני האפס במשחק (N,v).

נגדיר מושג פתרון באופן הבא:

$$\phi_i(v) = \begin{cases} \dfrac{v(N)}{n-|Z(v)|} & i \notin Z(v) \\ 0 & i \in Z(v) \end{cases}$$

נבין הדרישות: (א) יעילות; (ב) סימטריה; (ג) שחקן אפס;

(ד) מושג הפתרון שונה מערך שפלי.

(א)
$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j(v) = \sum_{i \notin Z(v)} \phi_i(v) =$$

$$(n-|Z(v)|) \cdot \frac{v(N)}{n-|Z(v)|} = v(N)$$

(ב) אם i,j שחקנים סימטריים, אז או ששניהם

ב $Z(v)$ או אף אחד מהם לא ב $Z(v)$,

ולכן בהגדרה יתקיים $\phi_i(v)=\phi_j(v)$.

(ג) התכונה מתקיימת באופן ישיר מההגדרה, שכן
$\phi_i(v)=0 \Leftarrow i\in Z(v)$.

(ד) נראה שמושג הפתרון אינו מקיים אדיטיביות
כיון אינו מוגדר על ערך שפלי (לפי
האפיון של ערך שפלי בגישה האקסיומטית):
נסתכל על משחקים $v,w\in V$ הבאים:

$$
\begin{array}{ll}
v(\phi)=0 & w(\phi)=0\\
v(1)=0 & w(1)=1\\
v(2)=1 & w(2)=0\\
v(3)=1 & w(3)=1\\
v(1,2)=1 & w(1,2)=1\\
v(1,3)=1 & w(1,3)=2\\
v(2,3)=2 & w(2,3)=1\\
v(1,2,3)=3 & w(1,2,3)=3
\end{array}
$$

קל לראות כי $Z(v)=\{1\},\ Z(w)=\{2\}$.
לכן:

$$\phi(v)=\left(0,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$
$$\phi(w)=\left(\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$$

$$\phi(v)+\phi(w)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{6}{2}\right)$$

ולכן
לסכום נציג, בשונה $v+w$ אין שינוי
אפס, וכי $Z(v+w)=\emptyset$ ולכן

$$\phi(v+w)=\left(\frac{6}{3},\ \frac{6}{3},\ \frac{6}{3}\right)$$

כלומר
$$\phi(v+w)\neq\phi(v)+\phi(w)$$
ולכן אדיטיביות לא מתקיימת.

$\square$