תורת המשחקים השיתופיים

תרגיל בית 9

עומר מזמון

313329666

1. משחק שיתופי (N,V) ייקרא אדיטיבי אם לכל שתי קואליציות **זרות** S,T מתקיים: $V(S\cup T)=V(S)+V(T)$. חשבו את ערך שפלי לשחקן $i\in N$ במשחק זה.

מתנאי האדיטיביות נקבל שלכל $i\in N$
ולכל סדר $R\in\Pi$:

$$\Psi_i^R = V(P_i^R\cup\{i\}) - V(P_i^R) = V(\{i\})$$

ולכן ערך שפלי של שחקן $i\in N$ הוא:

$$Sh_i(V) = \frac{1}{n!}\sum_{R\in\Pi}\Psi_i^R = \frac{n!}{n!}V(\{i\})$$

$$= V(\{i\})$$

(שים לב גם שתנאי האדיטיביות גורר כי
הוקטור $(V_1, \dots V_n)$ מקיים יעילות)

2. חשבו את ערך שפלי במשחקים הבאים:

א. [3; 1,1,1,2,2].

ב. [5; 1,1,2,2,3,3].

<u>משחק א':</u>

ראשית, מסימטריה, מתקיים:

$$Sh = (\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$$

<u>חישוב α:</u> נחשב עבור שחקן 1. נגדיר:

$$\tilde{R} = \{(i, j, 1, k, l) \mid i, j \in \{2,3\}, k, l \in \{4,5\}, i \neq j \neq k \neq l\}$$

$$R^* = \{(i, 1, j, k, l) \mid i \in \{4,5\}, j, k, l \in \{2,3\}, i \neq j \neq k \neq l\}$$

נשים לב כי $R^* \cap \tilde{R} = \emptyset$ ו- $R^* \cup \tilde{R}$ הוא קבוצת הסידורים בהם שחקן 1 הוא שחקן מכריע.

נחשב את גודל הקבוצה:

$$|R^{*} \cup \tilde{R}| \underset{\text{קב' זרות}}{=} |R^{*}| + |\tilde{R}| = \underbrace{2}_{\substack{\text{בחירת} \\ 4/5}} \cdot \underbrace{3!}_{\substack{\text{סידור} \\ \text{הנותרים}}} + \underbrace{2!}_{\substack{\text{סידור} \\ 2/3}} \cdot \underbrace{2!}_{\substack{\text{סידור} \\ 4/5}}$$

$$= 12 + 4 = 16$$

לכן

$$\alpha = \frac{16}{5!} = \frac{16}{120} = \frac{4}{30}$$

חישוב β:

מנורמליות מתקיים:

$$3\alpha + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(1 - 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\left(1 - 3 \cdot \frac{4}{30}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

ולכן בסה"כ:

$$Sh = \left(\frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

[5; 1,1,2,2,3,3]

משחק ג':

$Sh = (\alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma, \gamma)$

רשימת, סימטריה מתאימים:

חישוב α: נחשב עבור שחקן 1. הסדורים R

עבורם $\psi_1^R = 1$ אם גם שחקן, שקולים מתאימים:

סוג השחקן:

$P_1^R = \{2, 2\}$, או:

$P_1^R = \{1, 3\}$.

כמות הסדורים עבור הראשון: $2! \cdot 3! = 12$

כמות הסדורים עבור השני: $\underbrace{2}_{\text{רחיות שחקן מסוג 3}} \cdot 2! \cdot 3! = 24$

$$\alpha = \frac{12+24}{6!} = \frac{36}{720}$$

נכון

חישוב γ^3: נחשב עבור שתין 3. הסוגים R עבורם $\varphi_3^R = 1$ הם אלו שגוים מהן "ים:

$P_1^R = \{1, 2\}$, או:

$P_1^R = \{1, 1, 2\}$, או:

$P_1^R = \{3\}$, או:

$P_1^R = \{1, 3\}$. פי׳ נסטרו:

סוג סדר	מנות הסדרים:
ראשון	$2 \cdot 2! \cdot 3! = 24$
שני	$3! \cdot 2! = 12$
שלישי	$2 \cdot 4! = 48$
רביעי	$2 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 3! = 48$

סה"כ, 132 סדרים.

לכן מתקיים:

$$\beta = \frac{132}{6!} = \frac{132}{720}$$

חישוב γ: מנרמול מתקיים

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - (\alpha + \beta) = \frac{360 - 168}{720} = \frac{192}{720}$$

ולכן קיבלנו:

$$Sh = \frac{1}{720}\left(36, 36, 132, 132, 192, 192\right)$$

3. נתון משחק הרוב הבא בו מספר השחקנים הינו $m+1$:

$V_m = \left[1; \frac{2}{3}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right]$. חשבו מהו הגבול של ערך שפלי של שחקן 1 $\lim_{m\to\infty} sh_1(V_m)$ כאשר m שואף לאינסוף.

והי $R \in \Pi_{m+1}$ סידור כלשהו, בו שחקן 1 נמצא במקום ה $t+1$ (עבור $t = 0, \dots, m$).

כדי שיתקיים שהתרומה השולית היא 1 ולא 0,

קרי $\psi_1^R = 1$, צריך שיתקיים:

$$\frac{1}{3} \overset{(1)}{\le} \frac{t}{m} \overset{(2)}{<} 1$$

מ-(2) נובע שסך הקואליציה עם t שחקנים שאינם שחקן 1 הינו 0, ומ-(2) נובע שבצירוף שחקן 1 מקבלים קו' אשר ערכה הוא 1.

ניתן לכתוב את התנאי שקול לכך:

$$\frac{m}{3} \le t < m \iff t \in \left\{\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil, \dots, m-1\right\}$$

כמות ערכי t המק״ימ את התנאי הוא:

$$m-1-\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 1 = m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$$

ולכן כמות הסדרים עבורם התנאי השפלי הוא 1 הוא כמות ערכי ה- t כפול מספר הסידורים הפנימ״ים של יתר השחקנים: $m!$.

כלומר, ערך שפלי של שחקן 1 הינו:

$$Sh_1(V_m) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{R \in \Pi} \psi_1^R =$$

$$\frac{1}{(m+1)!} \cdot \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor \cdot m! = \frac{1}{m+1} \cdot \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor$$

מהגדרת ערך שלם תחתון מתק״ים:

$$Sh_1(V_m) \leq \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2m}{3} = \frac{2m}{3(m+1)} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{2}{3}$$

וגם:

$$Sh_1(V_n) \geq \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{2n}{3} - 1 \right) = \frac{2n}{3(n+1)} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{3}$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ':

$$Sh_1(V_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{2}{3}$$

4. אותה שאלה כמו ב-4 כאשר $V_m = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right]$.

באופן דומה לתרגיל הקודם, הפעם התנאי ל t הוא:

$$\frac{1}{6} \le \frac{t}{m} < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{6}m \le t < \frac{1}{2}m$$

כלומר

$$t \in \left\{\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1\right\}$$

מס' ערכי t האפשריים:

$$T = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil$$

סה"כ:

$$\frac{m}{3} - 1 \le T \le \frac{m}{3} + 1$$

כלומר, ערך שפלי ל שחקן 1 הינו:

$$Sh_1(V_m) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{R \in \Pi} \psi_1^R = \frac{1}{(m+1)!} \cdot T \cdot m!$$

$$= \frac{T}{m+1}$$

[illegible]

$$Sh_1(V_m) \leq \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{m+1}\right) + \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{3}$$

$$Sh_1(V_m) \geq \frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{m+1}\right) - \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{3}$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ':

$$Sh_1(V_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{3}$$