הרצאה 1

בעיית השידוכים:

שוק דו צדדי של גברים ונשים, רוצים לעשות התאמה באופן יציב. לכל גבר יש את ההעדפות שלו על קבוצת הנשים ולכל אישה יש את ההעדפות שלה על קבוצת הגברים.

הגדרת שידוך (Matching):

A matching $\mu : M \cup W \to M \cup W$ is a one to one function such that $\mu(m) \in W$ and $\mu(\mu(m)) = m$ for every $m \in M$.

זוג ייקרא זוג חוסם אם שניהם מעדיפים אחד את השני על פני בני זוגם בשידוך הנוכחי. כלומר, הגבר m מעדיף את w על $\mu(m)$ שזו האישה שמשודכת לו וכנ"ל עבור האישה w וגבר m על $\mu(w)$.

שידוך μ ייקרא שידוך יציב אם אין אף זוג חוסם בשידוך.

משפט Gale Shapley: לכל בעית שידוכים קיים שידוך יציב.

אלגוריתם הקבלה הנדחית (The Deferred-Acceptance Algorithm) – שידוך חיזור הגברים:

לכל גבר ולכל אישה יש בית. בשלב הראשון כל גבר הולך לביתה של האישה שהוא הכי רוצה. כל אישה רואה אם וכמה גברים מגיעים לביתה ובוחרת את הגבר הכי מועדף עליה מביניהם. שאר הגברים נדחים וחוזרים לבתיהם.

בשלב ה-k כל גבר שנמצא בביתו הולך לאישה שמועדפת עליו ביותר מבין הנשים שלא דחו אותו עדיין. כל אישה בוחרת מבין הגברים שבאים אליה, כולל הגבר שאצלה, אם יש. לא בהכרח שכל גבר הולך לאישה שמדורגת k ביחס ההעדפות שלו.

התהליך נפסק בשלב הראשון שבו אין דחיות.

טענה: התהליך הנ"ל מסתיים בשידוך והשידוך שמתקבל הוא יציב.

(3 טענות בטענה אחת – התהליך מסתיים, מסתיים בשידוך, השידוך יציב)

שני עקרונות מרכזיים שהתהליך מקיים, שעוזרים לו להסתיים בשידוך יציב, הם:

עיקרון הגברים העדיפים בעתיד:

אם בסיום שלב k נמצא אצל אישה w גבר m ובסיום שלב x>k נמצא אצל w גבר m’ אזי $m' \succ_w m$.

עיקרון הנשים העדיפות בעבר:

אם גבר מסוים m מקבר אישה w בשלב k ובשלב x>k הוא מבקר את w’ אזי $w \succ_m w'$.

שידוך חיזור הגברים הוא הטוב ביותר לגברים! לכן לגברים שווה להגיד אמת, הנשים יכולות לנסות לשפר את מצבן אם ישקרו. **יכולים להיות כמה שידוכים יציבים**!

הרצאה 2

עכשיו נאפשר רווקות:

לכל גבר יש סדר עדיפויות מעל קבוצת הנשים **ועצמו**. כלומר, אם גבר מעדיף את עצמו על פני אישה מסוימת, זה אומר שהוא מעדיף להיות לבד מאשר להיות איתה.

שידוך ייקרא שידוך רציונאלי אם לכל גבר m אין זה המצב שהוא מעדיף את עצמו על פני $\mu(m)$ (האישה שמשודכת אליו), ואותו דבר לגבי הנשים. ניתן להגדיר שאישה w מקובלת על גבר m אם הוא מעדיף אותה על עצמו. שידוך יהיה רציונאלי כשאין שידוך לא מקובל.

כעת, נגדיר מחדש שידוך יציב כשידוך רציונאלי שאין בו זוג חוסם (הוספנו תנאי רציונאליות).

גם עם רווקות, עדיין מתקיים שלכל בעיית שידוכים קיים שידוך יציב!

בחיזור הגברים מצב הנשים הולך ומשתפר ומצב הגברים הולך ונהיה גרוע (לפי העקרונות).

אישה w תיקרא בת השגה עבור גבר m אם קיים שידוך כך שמתקיים $\mu(m)=w$.

משפט: שידוך הוא אופטימלי לכל גבר, כלומר, כל גבר m משודך לאישה שהוא הכי מעדיף מבין הנשים שהן בנות השגה עבורו (אם קיימות כאלה).

מסקנה: שידוך חיזור הגברים אופטימלי עבור הגברים וגרוע ביותר עבור הנשים, ולהפך!

משפט: בהינתן שני שידוכים יציבים μ,λ , נגדיר את האופרטור $\mu\ V_M\ \lambda$ להיות ההתאמה שמתקבלת על ידי התאמת האישה המועדפת מבין $\{\mu(m),\lambda(m)\}$ לכל גבר m. התאמה זו היא שידוך יציב.

הרצאה 3

מודל החלפת הבתים: לכל סוכן יש בית ויחס העדפות על כל הבתים, A היא קבוצת הסוכנים, H היא קבוצת הבתים, גודלן שווה. $\prec_a$ הוא יחס העדפה חזק של כל סוכן על פני כל הבתים.
$h:A\to H$ פונקציה חח"ע ועל שמתאימה לסוכן בית, כלומר $h(a)$ הוא הבית של סוכן a .

הקצאה (allocation) μ היא פונקציה חח"ע ועל מסוכנים לבתים, כלומר $\mu:A\xrightarrow[on]{1to1}H$.

הקצאה היא פרטו יעילה אם אין הקצאה אחרת v כך ש:

1. $\mu(a)\leq_a v(a)$ לכל $a\in A$
2. קיים $a\in A$ כך ש: $\mu(a)<_a v(a)$

אם שניהם מתקיימים נגיד ש- v שולטת פרטו על μ .

הקצאת דיקטטור סדרתי (Serial Dictatorship Assignment):

יש סדר שנקבע מראש על הסוכנים. הסוכן הראשון מקבל את הבית המועדף עליו ביותר. הסוכן הבא מקבל את הבית המועדף עליו ביותר מבין הבתים הנותרים וכו.

משפט: ההקצאה המתקבלת בתהליך הנ"ל היא פרטו יעילה.

הקצאה היא <u>רציונלית פרטית</u> אם לכל סוכן $a \in A$ מתקיים: $h(a) \leq_a \mu(a)$, כלומר כל סוכן מקבל בהקצאה μ בית שטוב לו לפחות כמו הבית שנמצא ברשותו.

הקצאה μ <u>ניתנת לחסימה</u> על ידי קואליציה $S \subseteq A$ אם קיימת השמה $1:1$ $v: S \to h(S) \triangleq \{h(a) \mid a \in S\}$ כך שמתקיים:

1. $\mu(a) \leq_a v(a)$ לכל $a \in S$

2. קיים $a \in S$ כך ש: $\mu(a) <_a v(a)$

<u>הליבה</u> C היא אוסף כל ההקצאות שאינן ניתנות לחסימה על ידי קואליציה $S \subseteq A$.

אם $u \in C$ אז היא גם פרטו יעילה וגם רציונלית פרטית!

<u>משפט שאפלי סקארף</u>: הליבה של בעית השמת הבתים אינה ריקה, ויש בה בדיוק הקצאה אחת.

<u>אלגוריתם Top Trading Cycle</u>: להשלים

<u>טענה</u>: ההקצאה μ המתקבלת מאלגוריתם TTC הינה בליבה.

<u>הרצאה 4</u>

<u>משחק שיתופי</u> זה זוג סדור (N,V) כאשר N היא קבוצה סופית של שחקנים ו- V היא פונקציית שווי שנותנת ערך מספרי לכל תת קבוצה $S \subseteq N$ (מניחים שהקבוצה הריקה מקבלת את הערך 0). לכל תת קבוצה S נקרא <u>קואליציה</u>, כאשר אוסף כל הקואליציות מסומן ב- $2^{|N|}$ (כמספר כל האפשרויות של הקואליציות). הערך $V(S)$ זה מה שחברי הקואליציה S יכוליות להשיג אם הם יתאחדו, ללא תלות בשאר השחקנים.

השאלות שנשאל: תחת אילו תנאים הגיוני להניח שכולם יתאגדו ביחד? אם זה קורה, כמה צריך לשלם לכל אחד? מה הדרישה הבסיסית? תשובה: סכום התשלומים יהיה הערך של הקואליציה הגדולה. עוד דרישות? למשל, שכל אחד יקבל לפחות כמה שהוא יכול להשיג לבד.

סוג כזה של משחקים נקרא <u>משחקי רווח</u>, שהערך של כל תת קבוצה מייצג רווח של קואליציה ובדרך כלל ההנחה היא שהמספרים הם אי שליליים.

דוגמא בולטת למשחקים קואליציונים באה מהעולם הפוליטי – כמה מפלגות, לכל מפלגות מספר מנדטים, ביחד הן רוצות ליצור קואליציה ולחלק משאבים בין חברי הקואליציה. משחק כזה נקרא <u>משחק רוב משוקלל</u>, והוא מורכב מקבוצת שחקנים ופונקציות שווי שמתוארת באופן הבא: יש מכסה אי שלילית $q \geq 0$ ומשקולות אי שליליות לכל שחקן $(w_i)_{i \in N}$. למשל, בכנסת שלנו, המשקולות יהיו מספר המנדטים והמכסה תהיה 61 מנדטים בשביל רוב.

נגדיר את אוסף כל ה<u>חלוקות</u> X עבור משחק שיתופי (N,V) כאוסף כל הוקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ שהם individually rational ויעילים: $X=\{x\in\mathbb{R}^n:\forall i\in N, x_i\ge V(i)\ and\ \sum_{i=1}^{n}x_i=V(N)\}$

כלומר, שכל אחד ירוויח יותר ממה שהיה מרוויח לבד, והסכום של הכל שווה לערוך הקואליציה. אוסף חלוקות זה נקרא <u>וקטורי חלוקה</u>.

וקטור חלוקה $x\in X$ יהיה <u>לא יציב</u> אם קיימת קואליציה לא ריקה $S\subseteq N$ שעבורה מתקיים: $V(S)>\sum_{i\in S}x_i=X(S)$ כי אז חברי הקואליציה יוכלו לפרוש ולהגדיל את הרווח של כל אחד מהם ביחס ל-x בכך שכל אחד יקבל $x_i+\frac{V(S)-X(\mathrm{S})}{|\mathrm{S}|}$.

לכל וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ וקואליציה S נסמן את $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$ ונגדיר את הליבה C (Core) של המשחק:

$$C=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\forall\varnothing\neq S\subseteq N, V(S)\le x(S)\ and\ \sum_{i=1}^{n}x_i=V(N)\right\}\qquad\boxed{\sum_{i\in S}x_i\ge V(S)}$$

הליבה של משחק שיתופי היא קבוצה סגורה, חסומה וקמורה.

קבוצה $C\subseteq R^n$ תיקרא <u>קמורה</u> אם לכל $x,y\in C$ ולכל $0\le\alpha\le1$ מתקיים $\alpha x+(1-\alpha)y\in C$.
כלומר כל קו שמחבר בין שתי נקודות חייב להיות בתוך הקבוצה. החיתוך של שתי קבוצות קמורות גם הוא קבוצה קמורה.

קבוצה $C\subseteq R^n$ תיקרא <u>סגורה</u> אם לכל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ של איברים מ-C המתכנסת לנקודה x^* מתקיים ש- $x^*\in C$. במילים אחרות – קבוצה שכוללת את השפה שלה.

קבוצה $C\subseteq R^n$ תיקרא <u>חסומה</u> אם קיים $M,n>0$ כך ש: $|x_i|\le\mathrm{M}$ לכל $x\in C$ ו-$1\le i\le n$.

<u>הרצאה 5</u>

הליבה עונה על שתי שאלות: 1. בהינתן משחק שיתופי, האם זה הגיוני שהקואליציה הגדולה תתאגד כולה ביחד וזו תהיה הקואליציה שתיווצר? 2. ואם כן, איזה תשלום כל אחד מהשחקנים צריך לקבל בשביל לשמור על תנאי יציבות מסוימים?

חלוקה x היא <u>יציבה ונמצאת בליבה</u> אם לכל קואליציה לא ריקה S הערך של הקואליציה תחת V קטן מהערך שחברי S מקבלים תחת וקטור התשלומים x (תנאי <u>יציבות קואליציונית</u>).

התנאי השני הוא <u>תנאי היעילות</u> שאומר שמה שאנחנו מחלקים זה כל מה שיש לחלק, כלומר $V(N)$.

תנאים הכרחיים לכך שהליבה של משחק עם 3 שחקנים אינה ריקה הם ש-$V(1,2,3)\ \le$:

$$V(1)+V(2)+V(3),V(1)+V(2,3),V(2)+V(1,3),\mathrm{V}(3)+V(1,2),\frac{1}{2}\big(V(1,2)+V(1,3)+V(2,3)\big)$$

אוסף של תתי קבוצות הוא קבוצה שכל איבר בה הוא תת קבוצה של N. אוסף של תתי קבוצות ייקרא <u>אוסף מאוזן</u> (balanced collection) אם קיימים משקולות חיוביים לכל תת קבוצה באוסף שמקיימים את התכונה הבאה: לכל שחקן i אם נסתכל על כל הקבוצות S באוסף D ש-i שייך אליהן, ונסכום את המשקולות, נקבל 1.

אם D הינה חלוקה של הקבוצה N, כלומר $S \cap T = \varnothing$ לכל $S,T \in D$ כך ש-$S \neq D$ וגם $\bigcup_{S \in D} S = N$, אזי D הינו אוסף מאוזן.

האוסף $D = \{S \subseteq N : |S| = k\}$ (אוסף כל תתי הקבוצות מגודל מסוים k) הוא מאוזן עם וקטור המאזנים $\delta_S = \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}$ לכל $S \in D$.

אם יש וקטור של מספרים אי שליליים על פני כל תתי הקבוצות שמקיים $\sum_{S:i \in S} \delta_S = 1$ אז האוסף $D = \{S : \delta_S > 0\}$ הוא אוסף מאוזן.

<u>משפט (בונדרבה שאפלי)</u>: (Bondareva-Shapley)

הליבה של המשחק (N,V) היא לא ריקה אם ורק אם לכל אוסף מאוזן D עם וקטור מאזן δ מתקיים: $\sum_{S \in D} \delta_S V(S) \leq V(N)$. כלומר זהו תנאי מספיק והכרחי.

המשפט שימושי בעיקר בשביל להוכיח שהליבה לא ריקה - מספיק למצוא אוסף אחד מאוזן ומשקולות מתאימות עבורו אי השוויון הנ"ל יתקיים בכיוון ההפוך.

אוסף מאוזן נקרא <u>מינימאלי</u> אם יש לו וקטור מאוזן יחיד.

<u>שוק</u> מורכבת מקבוצת סוחרים $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ וקבוצת סחורות L כך שלכל שחקן i יש איזשהו a_i שמייצג את סל כל הסחורות שהביא מהבית, ופונקציה u_i שמייצגת טכנולוגיית ייצור, כלומר את הדרך של השחקן לתרגם סל מוצרים לכסף.

<u>הרצאה 6</u>

המשחק שנגזר משוק הוא משחק בו כל קואליציה ממקסמת את הרווחים שלה ביחס לסחורות ולטכנולוגיות הייצור שיש לה. לכן כל שוק מגדיר משחק שיתופי.

לכל קואליציה לא ריקה S נגדיר את X^S להיות אוסף כל החלוקות של החברים של S, כלומר:

$$X^S = \left\{ (x_i)_{i \in S} : x_i \in \mathbb{R}^l_+ \ and \ \ x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} a_i = a(S) \right\}$$

<u>טענה</u>: לכל קבוצה S לא ריקה, הקבוצה X^S היא קומפקטית (= סגורה וחסומה).

למה צריך את זה? כדי להגדיר את המשחק השיתופי שנגזר מהשוק, צריך לתת ערך לכל קואליציה, מכיוון שאמרנו שהשווי של כל קואליציה זה הרווח המקסימלי שחבריה יכולים להשיג על ידי חלוקת הסחורות, נגדיר: $V(S)=max\left\{\sum_{i\in S}u_i\left(x_i\right)|\left(x_i\right)_{i\in S}\in X^S\right\}$.

בשביל שיתקבל מקסימום צריך שהפונקציה תהיה רציפה ושהאובייקט יהיה קבוצה קומפקטית ואז לפי משפט במתמטיקה פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית תמיד מקבלת מקסימום.

קצת מבלבל אבל בכל זאת: משחק הוא משחק שוק אם קיים איזשהו שוק שהמשחק שנגזר מהשוק שנותנים לנו הוא בדיוק המשחק שיש לנו.

משפט שאפלי שוביק: הליבה של משחק שוק היא לא ריקה.

תת המשחק (S,V) מתקבל מהמשחק (N,V) על ידי $S\subseteq N$ כאשר פונקצית הקואליציות V מוגבלת לקואליציות שמוכלות ב- S. נקרא גם "המשחק (N,V) מוגבל ל- S".

מסקנה מההגדרה: אם (N,V) הוא משחק שוק אז גם כל תת משחק שלו הוא משחק שוק. משפט שאפלי-שוביק מוכיח שגם הליבה של כל תת משחק (שנגזר מהמשחק הגדול) היא לא ריקה.

משחק שיתופי ייקרא מאוזן לחלוטין אם הליבה שלו לא ריקה והליבה של כל תת משחק שלו לא ריקה. כעת ניתן לנסח מחדש את משפט שאפלי שוביק: כל משחק שוק הוא מאוזן לחלוטין (אמ"ם).

תנאי מספיק והכרחי לכך שמשחק ייגזר משוק הוא שהליבה של כל תת משחק שלו תהיה לא ריקה, כלומר שהוא יהיה מאוזן לחלוטין. משפט: כל משחק מאוזן לחלוטין הוא משחק שוק. שאלה שלפעמים מופיעה בבחינה: נתון משחק, האם זה משחק שוק? צריך להראות שהליבה לא ריקה ושהליבה של כל תת קבוצה שלו לא ריקה, לכן מאוזן לחלוטין, לכן משחק שוק!

אז יש לי משחק (N,V) מאוזן לחלוטין. איך אני בונה שוק שיוצר אותו? השוק שנגדיר שיוצר את המשחק הזה הוא השוק הישיר, אשר מוגדר באופן הבא: קבוצת הסחורות שווה בדיוק לקבוצת השחקנים. הצרור ההתחלתי של כל שחקן i יהיה בדיוק וקטור היחידה ולכל השחקנים יש את אותה פונקצית יצור שמוגדרת באופן הבא:

$$u(x)=max\left\{\sum_{\varnothing\neq S\subseteq N}\alpha_S V(S):\alpha_S\geq 0\ and\ \forall 1\leq j\leq n,\ \sum_{S:j\in S}\alpha_S=x_j\right\}$$

מסקנות מהמשפט: אם יש לנו משחק שוק, אז קיים שוק אחד שיוצר את המשחק הזה בו כל פונקציות הייצור של כל השחקנים הן שוות, למה? כי אם עוברים לשוק הישיר, זה מתקיים!

הרצאה 7

אנחנו רוצים לייצר כלי שיקבל כקלט משחק ויתן לנו כפלט את וקטור התשלומים. נגדיר את ν להיות אוסף פונקציות השווי V עבור קבוצת השחקנים N. מכאן ניתן לראות שמשחק זה בעצם וקטור ענק מגודל 2^n-1. <u>מושג הפתרון</u> (הכלי) שנרצה הוא פונקציה $\varphi:\nu\to\mathbb{R}^n$ אשר בהינתן משחק V משייכת תשלום $\varphi_i(V)$ לכל שחקן.

אילו תכונות נרצה שהפונקציה $\varphi:\nu\to\mathbb{R}^n$ תקיים? דבר ראשון, שהפתרון יקיים יעילות, כלומר שמה שאנחנו מחלקים זה בדיוק מה שיש: $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(V)=V(N)$. במילים אחרות, מושג פתרון מקיים את <u>תכונת היעילות</u> אם לכל משחק $V\in\nu$ מתקיים השוויון הנ"ל.

שחקנים i,j נקראים <u>שחקנים סימטריים</u> אם לכל קואליציה שלא מכילה אותם, מתקיים $V(S\cup\{i\})=V(S\cup\{j\})$. דרך אחרת להסתכל על זה היא שאם ניקח כל קואליציה שמכילה רק אחד משני השחקנים ונחליף ביניהם, זה לא משנה את שווי הקואליציה. נרצה שהם יקבלו אותו דבר.

מושג פתרון φ מקיים את <u>תכונת הסימטריה</u> אם בכל משחק שיתופי (N,V) כך ששחקנים i,j הם סימטריים, התשלום ששחקן i מקבל תחת φ שווה לתשלום ששחקן j מקבל תחת φ.

שחקן i נקרא <u>שחקן אפס</u> במשחק (N,V) אם לכל קואליציה $S\subseteq N$ מתקיים $V(S)=V(S\cup i)$.

מושג פתרון φ מקיים את <u>תכונת שחקן האפס</u> אם בכל משחק שיתופי (N,V) לכל שחקן אפס i מתקיים $\varphi_i(V)=0$. מושג פתרון φ מקיים את <u>תכונת האדיטיביות</u> אם לכל שני משחקים $V,W\in\nu$ מתקיים:
$$\varphi(V+W)=\varphi(V)+\varphi(W)$$

<u>משפט שאפלי</u>: ישנו מושג פתרון **יחיד** שמקיים את כל ארבע התכונות של: יעילות, סימטריה, שחקן אפס, ואדיטיביות. מושג פתרון זה נקרא <u>ערך שאפלי</u> ומסומן Sh.

משפט זה אומר שארבע התכונות קובעות פונקציה **יחידה** ממרחב המשחקים למרחב התשלומים, כלומר לא יכולות להיות שתי פונקציות שונות שמקיימות את כל התכונות, וחייבת להיות פונקצית שתקיים את כל התכונות!

הפתרון לא תמיד יהיה בליבה! הטענה נכונה גם למשחקים עם ליבה ריקה.

בהינתן קבוצת שחקנים N, פונקציה $R:N\to N$ נקראת סדר אם היא חד חד ערכית ועל, כלומר פרמוטציה. $R(i)$ הוא המיקום של i בסדר R. נגדיר את $\prod_n$ להיות אוסף כל הסדרים מעל N.

P_i^R יהיה אוסף כל השחקנים שמופיעים לפני שחקן i בסדר R. לכל $V\in v$ ולכל שחקן i,

ערך שאפלי הוא:
$$Sh_i(V)=\frac{1}{n!}\sum_{R\in\prod_n}\left(V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)\right)$$

ערך שאפלי הוא מושג פתרון ומושג פתרון הוא פונקציה שמקבלת משחק ומחזירה תשלום לכל שחקן. הביטוי $V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)$ זה בעצם התרומה השולית של שחקן i עבור סדר R.
הסכימה והחלוקה נותנות ממוצע, לכן ערך שאפלי הוא בעצם **ממוצע התרומות השוליות של השחקן**.

סכום כל ערכי שאפלי שווה לערך הקואליציה $V(N)$!!!

הקבוצה P_i^R מקיימת: $P_i^R=\left\{j:R(j)<R(i)\right\}\subset N/\{i\}$.

הרצאה 8

[חסכתי הוכחות למשפט שאפלי וכאלה, פחות רלוונטי למבחן...]

משחק ייקרא פשוט אם הערך של כל קואליציה הוא 0 או 1. משחק ייקרא מונוטוני אם כשאני מגדיל את תת הקבוצה אז הערך עולה, כלומר מתקיים: $V(S)\le V(T)\ when\ S\subseteq T\subseteq N$.

יהי (N,V) משחק מונוטוני פשוט, נגדיר קואליציה $S\subseteq N$ להיות קואליציה זוכה אם $V(S)=1$.

יהי (N,V) משחק מונוטוני פשוט ויהי $\Im$ אוסף כל תתי הקבוצות הזוכות המינימליות, עבור $T\subseteq N$ מתקיים:
$$V(T)=\begin{cases}1 & \exists S\in\Im,S\subseteq T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

יהי (N,V) משחק מונוטוני פשוט, נשים לב כי לכל שחקן i ולכל סדר $R\in\prod_n$ מתקיים:

$V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)\in\{0,1\}$ ומתקיים $V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)=1$ אם ורק אם $P_i^R\cup i\in\Im$.

סדר R ייקרא סדר מפתח עבור שחקן i אם $V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)=1$ ונסמן ב-R_i את אוסף כל הסדרים שבהם i שחקן מפתח.
$$Sh_i(V)=\frac{1}{n!}\sum_{R\in\prod_n}V\left(P_i^R\cup i\right)-V\left(P_i^R\right)=\frac{1}{n!}\sum_{R\in R_i}1=\frac{|R_i|}{n!}$$

שחקן מפתח – כל מי שלפניי שווים ביחד x וביחד איתי הם שווים $x+1$.

משחק רוב (N,V) הוא משחק שיכול להיות מתואר באמצעות הוקטור $V=[q:w_1,w_2,...,w_n]$ כאשר המכסה $q\geq 0$ והמשקלים $w_i\geq 0$. הערך של כל קואליציה הוא $V(S)=\begin{cases}1 & if \ \sum_{i\in S} w_i \geq q \\ 0 & if \ \sum_{i\in S} w_i < q\end{cases}$.

במשחק רוב, שחקן הוא שחקן מפתח אם כל מי שלפניו לא מהווים את המכסה, אבל איתו הם כן.

הרצאה 9

בעית מיקוח מתוארת על ידי שני שחקנים, קבוצה קמורה C שמייצגת את אוסף כל ההסכמים האפשריים, ונקודת אי הסכמה d שמייצגת את הסכום הכספי שכל שחקן יכול להבטיח לעצמו במקרה שתהליך המיקוח ייכשל. הגיוני שהפתרון שנציע יהיה על השפה של הקו המתאר את היחס בין שני השחקנים, כלומר יקיים תכונה של יעילות.

נסמן ב- B את אוסף כל בעיות המיקוח וב- f פונקציה שמקבלת אוסף בעיות מיקוח ומחזירה הסכם, כלומר: $f:B\to\mathbb{R}^2 \ \ such \ that \ \ f(C,d)\in C \ \ for \ every \ (C,d)\in B$. נניח ששני השחקנים יכולים להרוויח מהסכם, כלומר ש- $d<<b\in C$ (קטנה בשתי קואורדינטות).

כמו ערך שאפלי, התכונה הראשונה היא אקסיומת הסימטריה. קבוצה C תיקרא סימטרית כאשר $(a_1,a_2)\in C$ גורר $(a_2,a_1)\in C$. מה זה אומר? שהקבוצה סימטרית ביחס לישר $x_1=x_2$, כלומר שהבעיה היא שיקוף של עצמה.

מושג פתרון מקיים סימטריה אם לכל בעיה סימטרית התשלום ששחקן אחד מקבל שווה לתשלום ששחקן שתיים מקבל בסופו של דבר (=> הפתרון על הישר $x_1=x_2$).

נקודה $c\in C$ היא נשלטת פארטו (Pareto dominated) על ידי נקודה $a\in C$ אם $a_1\geq c_1, a_2\geq c_2$ וגם $a\neq c$. מושג פתרון יקיים יעילות אם הפתרון נמצא על השפה הפארטו-יעילה.

פונקציה f מקיימת את אקסיומת האינווריאנטיות ליחידות מדידה אם לכל $(C,d)\in B$ ו- $a,b\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $a>>0$ מתקיים: $f(aC+b,ad+b)=af(C,d)+b$

Scale invariance: $f(aC,ad)=af(C,d) \quad \forall (C,d)\in B, 0<<a\in\mathbb{R}^2$

Translation invariance: $f(C-b,d-b)=f(C,d)-b \quad \forall (C,d)\in B, b\in\mathbb{R}^2$

תכונת אי התלות אומרת שאם יש לנו שתי בעיות מיקוח עם אותה נקודת אי הסכמה: $(C,d),(S,d)\in B$ ונניח ש- $S\subset C$, אם $f(C,d)\in S$ אזי $f(S,d)=f(C,d)$. במילים אחרות –אם ערך פתרון נאש נמצא בשני התחומים אז הוא זהה עבור שניהם.

פתרון נאש (Nash Solution):

הפתרון הוא נקודה על השפה ש"ממקסמת" (maximize) את שטח המלבן בינה לבין נקודת אי ההסכמה d. $N\left(C,d\right)=\arg max_{c\in C,c\geq d}\left(c_1-d_1\right)\left(c_2-d_2\right)$

<u>משפט</u>: פתרון נאש מקיים את 4 האקסיומות שדיברנו עליהן, והוא היחיד שמקיים את כולן (אין פתרון אחר שמקיים את כל 4 התכונות). 4 האקסימות הן: סימטריות, יעילות, ליניאריות ואי תלות.

<u>טענה</u>: פתרון נאש מגדיר נקודה יחידה.

אם $C=\left[(0,b),(a,0),(0,0)\right]$ כאשר $d=(0,0)$, $a,b>0$ אזי הפתרון הוא $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

<u>**הרצאה 10**</u>

[חסכתי הוכחות של המשפט האחרון הנ"ל]

<u>ישר תומך</u> של S בנקודה x הוא ישר שעובר בנקודה x כך שכל הנקודות בקבוצה S נמצאות באותו צד של הישר.

תנאי מספיק והכרחי לפתרון נאש: y היא פתרון נאש של $\left(S,d\right)$ אם המשולש המוגדר על ידי ישר תומך ב- y , הנקודה d ובסיס מקביל לציר x הוא משולש שווה שוקיים. באופן שקול, y היא פתרון נאש של $\left(S,d\right)$ אם קיים ישר תומך ב- y ששיפועו הוא השיפוע $-k$ כאשר k השיפוע המחבר בין d לבין y.

<u>**הרצאה 11**</u>

נגדיר את F_0 להיות משפחת בעיות המיקוח $\left(S,d\right)$ המקיימות:

S קומפקטית וקמורה. $d=\left(0,0\right)$ נקודת אי ההסכמה.

$x\geq\left(0,0\right)$ לכל $x\in S$ וקיים $x\in S$ כך שמתקיים $x>>\left(0,0\right)$.

<u>קומפרהנסיביות (כוללנות)</u>: אם $x\in S$ אז המלבן המוגדר על ידי $\left\{\left(0,0\right),x\right\}$ מוכל ב- S.

באופן מתמטי: $x\in S\Rightarrow\left[0,x_1\right]\times\left[0,x_2\right]\in S$

לכל $S\in F_0$ נגדיר:

$$m_1\left(S\right)=max\left\{x_1\mid x\in S\right\}$$
$$m_2\left(S\right)=max\left\{x_2\mid x\in S\right\}$$

מושג פתרון φ מקיים <u>מונוטונית חזקה</u> על משפחת F_0 אם לכל זוג בעיות מיקוח $S,T\in F_0$ כך שמתקיים $S\subseteq T$ אזי מתקיים $\varphi(S)\le\varphi(T)$.

מושג פתרון φ מקיים <u>מונוטוניות חלשה</u> אם לכל זוג בעיות $S,T\in F_0$ כך שמתקיים $S\subseteq T$ וגם $m_2(S)=m_2(T)$, $m_1(S)=m_1(T)$ אזי מתקיים $\varphi(S)\le\varphi(T)$.

מושג פתרון φ מתקיים <u>פרון יעילות חלשה</u> מעל F_0 אם לכל $S\in F_0$ ו- $\varphi(S)=y$ לא קיימת נקודה $x\in S$ כך שמתקיים $x>>y$.

מושג פתרון φ מקיים <u>הומוגניות</u> (גרסה חלשה לאינווריאנטיות ליחידות מדידה) אם לכל $S\in F_0$ ולכל מספר ממשי $c>0$ מתקיים $\varphi(cS)=c\cdot\varphi(S)$ (בניגוד לכפל בכל קואורדינטה במספר אחר).

מושג פתרון מקיים <u>רציונליות פרטית</u> אם לכל $S\in F_0$ מתקיים $\varphi(S)>>0$.

<u>מושג פתרון λ_α</u> הוא החתיוך של ישר העובר ב- d בזווית α מציר x עם השפה של S. מושג פתרון זה מקיים: מונוטונית מלאה והומוגניות. אם $0<\alpha<90$ מתקיימת גם יעילות חלשה. לא מקיים אינווריאנטה ליחידות מדידה.

<u>משפט</u>: אם מושג פתרון φ על F_0 המקיים יעילות חלשה, הומוגניות, רציונליות פרטית, ומונוטוניות מלאה, אזי קיימת זווית $0<\alpha<90$ כך ש- $\varphi=\lambda_\alpha$.

<u>פתרון קלעי סמורודינסקי</u>: מותחים ישר בין $(m_1(S),m_2(S))$ לבין $(0,0)$, החיתוך שלו עם השפה של הבעיה הוא הפתרון והוא יסומן $KS(S)$.

<u>משפט</u>: פתרון קלאי סמורודינסקי מקיים סימטריה, יעילות חזקה, אינווריאנטיות ליחידות מדידה ומונוטונית **חלשה**, והוא היחיד המקיים את התכונות האלה! (לא מתקיים אי תלות בתחום לא רלוונטי)

<u>הרצאה 12</u>

בעית פשיטת הרגל: יש בעל חוב ונושים, בעל החוב פושט רגל אם סכום כל החובות גדול שלו ממה שיש לו. השאלה היא איך לחלק את מה שיש בין כל הנושים. נציג את פתרון אומן משלר עבור:

עיזבון = 1, נושה בעל זכות p ונושה בעל זכות q, נניח ששניהם בין 0 ל-1 (והסכום גדול מ-1 בשביל פשיטת רגל). נושה 1 מסכים ש $1-p$ שייך ל-2 ונושה 2 מסכים ש $1-q$ שייך ל-1. בתור התחלה נושה 1 ייקח $1-q$ ונושה 2 ייקח $1-p$ ונשאר לנו $1-(1-q)-(1-p)=q+p-1$ לגביו לשניהם יש claim, לכן נחלק שווה בשווה. בסה"כ נושה 1 יקבל $1-q+\frac{p+q-1}{2}=\ldots=\frac{1+p-q}{2}$ ואילו נושה 2 יקבל $1-p+\frac{p+q-1}{2}=\ldots=\frac{1+q-p}{2}$.

לסיכום, בתור התחלה כל אחד מקבל את מה שהשני מסכים לתת לו, נשארים עם סכום מסוים שכל אחד טוען שהוא שייך לו, לכן נחלק את מה שנשאר חצי חצי.

באופן כללי, <u>בעית פשיטת רגל</u> היא בעיה שבה קבוצת שחקנים $N=\{1,2,\dots,n\}$ כאשר לכל שחקן $i\in N$ יש חוב אי שלילי שהוא $d_i\in\mathbb{R}_+$, וקיים מספר אי שלילי של עיזבון $E\in\mathbb{R}_+$ כך שמתקיים $E<\sum_{i=1}^{n}d_i$. הבעיה תסומן על ידי $[E;d_1,\dots,d_n]$ או בקיצור $[E;d]$. <u>הקצאה</u> (allocation) עבור בעית פשיטת רגל היא וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ אשר מקיים $\sum_{i=1}^{n}x_i=E$. <u>מושג פתרון</u> עבור בעית פשיטת רגל הוא פונקציה φ אשר משייכת לכל בעיה $[E;d]$ הקצאה $\varphi[E;d]$

מושג פתרון φ הוא <u>קונסיסטנטי עם הפתרון התלמודי</u> אם ניקח את סכום כל הכסף ששני נושים i,j קיבלו לפי φ ונחלק אותו מחדש בין i,j לפי הפתרון שלנו (עם המיכלים), אז בסוף כל שחקן יקבל בדיוק את מה ש- φ נתן לו.

$$f_1\left(x;d_i,d_j\right)=\varphi_i\left(E;d_1,\dots,d_n\right),\ \ where\quad x=\varphi_i\left(E;d_1,\dots,d_n\right)+\varphi_j\left(E;d_1,\dots,d_n\right).$$

<u>משפט</u>: ישנו פתרון יחיד שמקיים קונסיסטנטיות עם הפתרון התלמודי (קיום ויחידות).

כדי לפתור בעיות, מציירים את המיכלים.

קיצור דרך 1: אם סך מחצית כל החובות קטן מהסכום לחלוקה, נוכל לחלק לכל השחקנים את מחצית חובם (כלומר למלא את כל המיכלים התחתונים) ולהמשיך למלא את שאר המיכלים עם מה שנשאר.

קיצור דרך 2: נמצא בקלות את ההפרש בין מחציות החובות של השחקנים, ואז נבדוק כמה "הפרשים" כאלה מוכלים בסכום הנותר, ונחלק לפי ההפרשים.