

א. נניח G היא גרף מכוון. V היא פונקציה $V: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות: $V(\emptyset) = 0$ ו- $V(S) \leq V(T)$ לכל $S \subseteq T \subseteq E$. נניח $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה המקיימת את התכונות: $f(e) \in [0, 1]$ לכל $e \in E$ ו- $\sum_{e \in S} f(e) \leq V(S)$ לכל $S \subseteq E$. נניח f היא פונקציה המקיימת את התכונות: $f(e) \in [0, 1]$ לכל $e \in E$ ו- $\sum_{e \in S} f(e) \leq V(S)$ לכל $S \subseteq E$. נניח f היא פונקציה המקיימת את התכונות: $f(e) \in [0, 1]$ לכל $e \in E$ ו- $\sum_{e \in S} f(e) \leq V(S)$ לכל $S \subseteq E$.

$$V(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\} \quad (N, V) \text{ נתון.}$$

נסתכל על הווקטור $x = (x_i)_{i \in E}$ שבו $x_i \in \{0, 1\}$ עבור $i \in E$. נניח $x_{L_T} = 1$ ו- $x_{R_T} = 0$.

$$\sum_{i \in M} x_i = |M \cap L| = \min\{|M \cap L|, |M \cap R|\} = V(M)$$

x מקיים צימוד קואליציוני: $S \subseteq M$ ו- $\sum_{i \in S} x_i \leq V(S)$ מתקיים.

$$V(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\} \stackrel{|S \cap L| < |S \cap R|}{=} |S \cap L| = \sum_{i \in S} x_i$$

$$V(S) = \min\{|S \cap L|, |S \cap R|\} \stackrel{|S \cap L| \geq |S \cap R|}{\leq} |S \cap L| = \sum_{i \in S} x_i$$

ולכן קיימת פתרון f של בעיית המקסימום.

ב. לא נכון

נסמן $w_1 >_m w_2 >_m w_3 >_m w_4$ כי $\mu_1(m) = w_1, \mu_2(m) = w_2, \mu_3(m) = w_3, \mu_4(m) = w_4$

נסתכל על w_1 :

אם $m \leq \frac{\mu_2(w_1)}{w_1}$ נקבל (m, w_1) שזו חוסם ב- μ_2 הסתירה ולכן צריך $m \leq \frac{\mu_2(w_1)}{w_1}$
כאופן קומה אם $\mu_2(w_1) \leq w_1$ נקבל $(\mu_2(w_1), w_1)$ שזו חוסם ב- μ_3 ולכן צריך $\mu_2(w_1) \leq w_1$
וכך גם נקבל $\mu_3(w_1) \leq w_1, \mu_4(w_1) \leq w_1$

$$m = \frac{\mu_1(w_1)}{w_1} \leq \frac{\mu_2(w_1)}{w_1} \leq \frac{\mu_3(w_1)}{w_1} \leq \frac{\mu_4(w_1)}{w_1}$$

נסתכל עתה על w_2 .

אם $m >_m \frac{\mu_3(w_2)}{w_2}$ נקבל (m, w_2) שזו חוסם ב- μ_3 ו

$$\mu_3(w_2) \leq w_2 \leq \frac{\mu_4(w_2)}{w_2}$$

אם $m \leq \frac{\mu_1(w_2)}{w_2}$ נקבל (m, w_2) שזו חוסם ב- μ_1 ולכן צריך $m \leq \frac{\mu_1(w_2)}{w_2}$
וכך גם נקבל $\mu_1(w_2) \leq w_2$

נסתכל עתה על w_3 ונקבל $\mu_1(w_3) \leq w_3 \leq \frac{\mu_4(w_3)}{w_3}$

כאופן קומה עבור w_3 נקבל $\mu_3(w_3) \leq w_3 \leq \frac{\mu_4(w_3)}{w_3}$

ועבור w_4 נקבל $\mu_1(w_4) \leq w_4 \leq \frac{\mu_4(w_4)}{w_4}$

∴

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq \frac{\mu_2(w_1)}{w_1} \leq \frac{\mu_3(w_1)}{w_1} \leq \frac{\mu_4(w_1)}{w_1} \\ \mu_1(w_2) \leq m \leq \frac{\mu_3(w_2)}{w_2} \leq \frac{\mu_4(w_2)}{w_2} \\ \mu_1(w_3) \leq \frac{\mu_3(w_3)}{w_3} \leq m \leq \frac{\mu_4(w_3)}{w_3} \\ \mu_1(w_4) \leq \frac{\mu_3(w_4)}{w_4} \leq \frac{\mu_4(w_4)}{w_4} \leq m \end{array} \right.$$

k. נראה כי ממש השתרון הנטא: $\Psi_i(V) = (\frac{V(N)}{n}, \frac{V(N)}{n} \dots \frac{V(N)}{n})$ ע.א.ת, סימטריה ואקסטרניור.
 ע.א.ת: $\sum_{i \in N} \Psi_i = \frac{V(N)}{n} \cdot n = V(N)$

סימטריה: יהיו $n, j \in N$ שחקנים סימטריים, מאחר ש $\Psi_j(V) = \Psi_i(V)$ מתקיימת סימטריה.

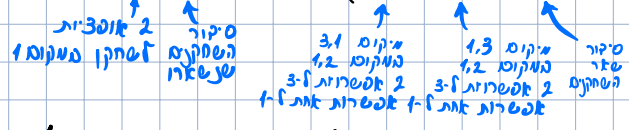
אקסטרניור: יהיו $V, W \in D$, נסתכל על $V+W$ ו sk

$$\Psi(V+W) = (\frac{V(N)+W(N)}{n}, \frac{V(N)+W(N)}{n} \dots \frac{V(N)+W(N)}{n}) = (\frac{V(N)}{n} + \frac{W(N)}{n}, \frac{V(N)}{n} + \frac{W(N)}{n} \dots \frac{V(N)}{n} + \frac{W(N)}{n}) = \Psi(V) + \Psi(W)$$

ה. קיימים 3 סוגי שחקנים וסימטריה של ערך שכל מספיק לחשב אותם בלבד

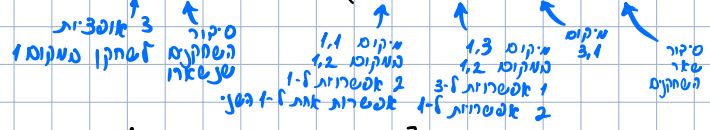
החישוב ערכי שכלי יאחר בסכימה רק סדרים שבהם שחקן i הוא שחקן מטפה, נסתמם R_j^i
 כאשר שחקן i שחקן מטפה נתקום $j-i < n$ ו $V(P_{R_j^i}) = 1$ ואם $V(P_{R_j^i}) = 0$

עבור שחקן $i: 1$ else 0: $R_1^1 = 0, R_2^1 = 2 \cdot 4!, R_3^1 = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \cdot 3! = 4 \cdot 3!$



$$Sh_1(V) = Sh_2(V) = \frac{1}{6!} \sum_{R_j^i \in \pi_R} R_j^i = \frac{1}{6!} (2 \cdot 4! + 4 \cdot 3!) = \frac{1}{10}$$

עבור שחקן $i: 3$ else 0: $R_1^3 = 0, R_2^3 = 3 \cdot 4!, R_3^3 = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \cdot 3! = 6 \cdot 3!$



$$Sh_3(V) = Sh_4(V) = \frac{1}{6!} \sum_{R_j^i \in \pi_R} R_j^i = \frac{1}{6!} (3 \cdot 4! + 6 \cdot 3!) = \frac{3}{20}$$

עבור שחקנים 5,6 נשתמש בעילוי ערך שכלי $2 \cdot \Psi_1(V) + 2 \cdot \Psi_3(V) + 2 \cdot \Psi_5(V) = 1$

$$\Psi_5(V) = \Psi_6(V) = \frac{1}{4}$$

$$C = \{ (x_1, x_2) : (2x_1 - 2)^2 + (5x_2 + 10)^2 \leq 2 \} \xrightarrow{\substack{2x_1 - 2 = y_1 \\ 5x_2 + 10 = y_2}} C' = \{ (y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 2 \}$$

$y_1^* = y_2^*$ ולכן $d_1' = d_2'$ מסתדרים. נקודת המרכז $d = (\frac{5}{4}, -\frac{19}{10}) \rightarrow d' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ נקודת המרכז והמרחק מהמקור הם $2y_1^* = 2$

$$y_1^* = 1$$

$$\downarrow \begin{matrix} x_1 = (y_1 - 2) \cdot \frac{1}{2} \\ x_2 = (y_2 - 10) \cdot \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$N(C, v) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{5})$$