1

א. כדי להוכיח כי המשחק הוא משחק שוק צריך להראות כי הוא מאוזן לחלוטין $\Leftrightarrow$ כל תת משחק שלו בעל ליבה לא ריקה.

נסתכל על $T=(M,W)$ תת משחק של (N,V). נתון $V(S)=\min\{|S\cap L|,|S\cap R|\}$

נניח בה"כ כי: $|M\cap L|\le|M\cap R|$

נסתכל על הווקטור בו $x_i=1$ עבור כל $i\in M\cap L$ ו-0 אחרת $\Leftarrow$ $x_{L_T}=1$, $x_{R_T}=0$

x מקיים יעילות: $\sum_{i\in M}x_i=|M\cap L|=\min\{|M\cap L|,|M\cap R|\}=V(M)$

x מקיים יציבות קואליציונית: תהא $S\subseteq M$ אזי מתקיים

$$V(S)=\min\{|S\cap L|,|S\cap R|\}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{אם}\\ |S\cap L|<|S\cap R|}}{=}|S\cap L|=\sum_{i\in S}x_i$$

$$V(S)=\min\{|S\cap L|,|S\cap R|\}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{אם}\\ |S\cap L|\ge|S\cap R|}}{\le}|S\cap L|=\sum_{i\in S}x_i$$

ולכן הליבה של כל תת משחק אינה ריקה ולכן המשחק מאוזן לחלוטין.

ב. לא בחומר

נסמן $\mu_4(m)=w_4$, $\mu_3(m)=w_3$, $\mu_2(m)=w_2$, $\mu_1(m)=w_1$, ונניח כי $w_1 >_m w_2 >_m w_3 >_m w_4$.

נסתכל על w_1:

אם $\mu_2(w_1) \underset{w_1}{<} m$ נקבל (m,w_1) זוג חוסם ב-μ_2 בסתירה ולכן צריך $m \underset{w_1}{<} \mu_2(w_1)$

באופן דומה אם $\mu_3(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_2(w_1)$, נקבל $(\mu_2(w_1), w_1)$ זוג חוסם ב-μ_3 ולכן צריך $\mu_2(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_3(w_1)$

וכך גם נקבל $\mu_3(w_1) <_{w_1} \mu_4(w_1)$

ובסה"כ עבור w_1 קיבלנו $m = \mu(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_2(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_3(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_4(w_1)$

נסתכל כעת על w_2.

אם $m >_{w_2} \mu_3(w_2)$ נקבל (m, w_2) זוג חוסם ב-μ_3 $\Leftarrow$ $m \underset{w_2}{<} \mu_3(w_2)$

וכך גם נקבל $\mu_3(w_2) \underset{w_2}{<} \mu_4(w_2)$

עבור $\mu_1(w_2)$ אם $m \underset{w_2}{>} \mu_1(w_2)$ וגם $\mu_1(w_2) \underset{\mu_1(w_2)}{<} w_2$ יוצר זוג חוסם ב-μ_2 ולכן נדרוש $\mu_1(w_2) \underset{w_2}{<} m$

ובסה"כ עבור w_2 קיבלנו $\mu_1(w_2) \underset{w_2}{<} m \underset{w_2}{<} \mu_3(w_2) \underset{w_2}{<} \mu_4(w_2)$

באופן דומה עבור w_3 נקבל $\mu_1(w_3) \underset{w_3}{<} \mu_3(w_3) \underset{w_3}{<} m \underset{w_3}{<} \mu_4(w_3)$

ועבור w_4 נקבל $\mu_1(w_4) \underset{w_4}{<} \mu_3(w_4) \underset{w_4}{<} \mu_4(w_4) \underset{w_4}{<} m$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m \underset{w_1}{<} \mu_2(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_3(w_1) \underset{w_1}{<} \mu_4(w_1) \\ \mu_1(w_2) \underset{w_2}{<} m \underset{w_2}{<} \mu_3(w_2) \underset{w_2}{<} \mu_4(w_2) \\ \mu_1(w_3) \underset{w_3}{<} \mu_3(w_3) \underset{w_3}{<} m \underset{w_3}{<} \mu_4(w_3) \\ \mu_1(w_4) \underset{w_4}{<} \mu_3(w_4) \underset{w_4}{<} \mu_4(w_4) \underset{w_4}{<} m \end{cases}$$

א. נראה כי מושג הפתרון הבא: $\psi_i(v)=\left(\frac{V(N)}{n},\frac{V(N)}{n}\dots\frac{V(N)}{n}\right)$ מקיים יעילות, סימטריה ואדיטיביות

יעילות: $\sum_{i\in N}\psi_i = \frac{V(N)}{n}\cdot n = V(N)$

סימטריה: יהיו $i,j\in N$ שחקנים סימטריים, מאחר ש-$\psi_i(v)=\psi_j(v)$ מתקבל כי מתקיימת סימטריה.

אדיטיביות: יהיו $V,W\in D$, נסתכל על $V+W$ ואז

$$\psi(v)=\left(\frac{V(N)+W(N)}{n},\frac{V(N)+W(N)}{n}\dots\frac{V(N)+W(N)}{n}\right)=\left(\frac{V(N)}{n}+\frac{W(N)}{n},\frac{V(N)}{n}+\frac{W(N)}{n}\dots\frac{V(N)}{n}+\frac{W(N)}{n}\right)=\psi(v)+\psi(w)$$

ב. קיימים 3 סוגי שחקנים וסימטריה של ערך שפלי מספיק לחשב אותם בלבד

בחישוב ערכי שפלי ישארו בסכימה רק סדרים שבהם שחקן i הוא שחקן מפתח, נסמנם R^i_j
כלומר שחקן i שחקן מפתח ממקום ה-j <= $V(P_{R^i_j})=0$ וגם $V(P_{R^i_j}\cup i)=1$

עבור שחקן 1: $R^1_1=0,\ R^1_2=2\cdot4!,\ R^1_3=(2\cdot1+1\cdot2)\cdot3!=4\cdot3!$ else 0

2 אופציות לשחקן במקום 1 | סידור השחקנים שנשארו | מיקום 3,1 במקומות 1,2 2 אפשרויות ל-3 אפשרות אחת ל-1 | מיקום 1,3 במקומות 1,2 2 אפשרויות ל-3 אפשרות אחת ל-1 | סידור שאר השחקנים

$$Sh_1(v)=Sh_2(v)=\frac{1}{6!}\sum_{R^j_1\in\pi_R}R^1_j=\frac{1}{6!}(2\cdot4!+4\cdot3!)=\frac{1}{10}$$

עבור שחקן 3: $R^3_1=0,\ R^3_2=3\cdot4!,\ R^3_3=(2\cdot1+2\cdot1+2\cdot1)\cdot3!=6\cdot3!$ else 0

3 אופציות לשחקן במקום 1 | סידור השחקנים שנשארו | מיקום 1,1 במקומות 1,2 2 אפשרויות ל-1 אפשרות אחת ל-1 השני | מיקום 1,3 במקומות 1,2 1 אפשרויות ל-3 2 אפשרויות ל-1 | מיקום 3,1 | סידור שאר השחקנים

$$Sh_3(v)=Sh_4(v)=\frac{1}{6!}\sum_{R^j_1\in\pi_R}R^1_j=\frac{1}{6!}(3\cdot4!+6\cdot3!)=\frac{3}{20}$$

עבור שחקנים 5,6 נשתמש ביעילות ערך שפלי $2\cdot\varphi_1(v)+2\cdot\varphi_3(v)+2\cdot\varphi_5(v)=1$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_5(v)=\varphi_6(v)=\frac{1}{4}$$

$$C=\{(x_1,x_2):(2x_1-2)^2+(5x_2+10)^2\le 2\}\xrightarrow[\substack{2x_1-2=y_1\\5x_2+10=y_2}]{} C'=\{(y_1,y_2): y_1^2+y_2^2\le 2\}$$

מתקיים מניסוף $d'=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \longleftarrow d=(\frac{5}{4},-\frac{19}{10})$ וקיבלנו c' תחום סימטרי עם $d_1'=d_2'$ ולכן $y_1^*=y_2^*$

והפתרון יתקבל על שפת התחום

$$2y_1^*=2$$

$$y_1^*=1$$

$$\Big\downarrow\ \substack{x_1=(y_1+2)\frac{1}{2}\\ x_2=(y_2-10)\cdot\frac{1}{5}}$$

$$N(c,v)=\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{5}\right)$$