א. לא נכון, למשל

$>_{h_1}$ a_1, a_2, a_3, a_4
$>_{h_2}$ a_2, a_3, h_4, a_1
$>_{h_3}$ a_3, a_2, a_1, a_4
$>_{h_4}$ a_4, a_2, a_1, a_3

$>_{a_1}$ h_2, h_1, h_3, h_4
$>_{a_2}$ h_1, h_2, h_3, h_4
$>_{a_3}$ h_1, h_2, h_3, h_4
$>_{a_4}$ h_1, h_2, h_3, h_4

מאלגוריתם שידוך הגברים מתקבלת ההשמה הבאה:

h_1	h_2	h_3	h_4
a_2, a_3, a_4	a_1		
a_2	a_1, a_3, a_4		
a_2, a_1	a_3	a_4	
a_1	a_3, a_2	a_4	
a_1	a_2	a_4, a_3	
a_1	a_2	a_3	a_4

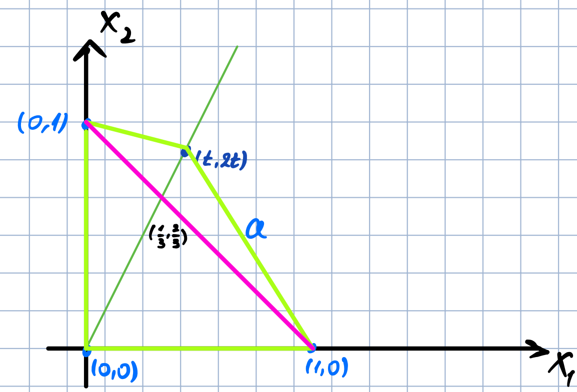
וניתן לראות כי ההשמה $(a_2,h_1),(a_1,h_2),(a_3,h_3),(a_4,h_4)$ שולטת עליה (סוכנים a_1 ו-a_2 התחלפו בין הבתים)

* השמה זו לא מתקבלת מאלגוריתם חיזור הגברים מאחר שבה (a_3,h_2) זוג חוסם

ב. נכון, תחילה נסדר את a_i להיות בראש סדר ההעדפות של h_i כפי שדרוש בשאלה. לאחר מכן נשתמש באלגוריתם ה-TTC, מי שבאיטרציה הראשונה קיבל בית, למשל a_i קיבל את h_j, יהיה הבא בתור מסדר ההעדפות של h_i אם לא רשום כבר. בכל איטרציה נעדכן לכל הבתים באופן זה את ההעדפות ואחרי שיסתיים האלגוריתם נמלא את המקומות הריקים שנותרו ביחסי ההעדפות באופן שרירותי.

יחסי ההעדפות הללו מבטיחים שההשמה שתתקבל תהיה זהה לזו המתקבלת מ-TTC כיוון שבכל איטרציה יוקצו בתים באופן שאלגוריתם TTC היה מקצה ומאחר שההשמה שמתקבלת מ-TTC מקיימת יעילות, גם זו שתתקבל מאלגוריתם חיזור הגברים באופן הנ"ל תקיים יעילות.

2



נשתמש באיפיון הגיאומטרי:

עבור $t\le\frac{1}{3}$ נקבל שהתחום המתקבל מ-4 הנקודות לא קמור ולכן נשתמש ב-$(0,1),(1,0),(0,0)$ כלומר שם התחום סימטרי עם $d_1=d_2$ ולכן $N(C,V)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

עבור $\frac{1}{3}<t\le\frac{1}{2}$ לא ניתן להעביר ישר תומך עם שיפוע 2- בנקודה $(t,2t)$ ולכן הפתרון יתקבל בנקודה שבה כן ניתן להעביר ישר כזה, נחפש באופן ויזואלי נקודה שבה ניתן ליצור משולש שווה שוקיים מהעברת ישר מ-d לנקודה ומהעברת אחד הישרים של שפת התחום - נשים לב כי הנקודה תהיה על ישר a, והקודקוד הראשי ימצא מעל אמצע הבסיס - $x_1=\frac{1}{2}$. הישר a הוא $x_2=\frac{-2t}{1-t}(x-1)$ ולכן עבור $x_1=\frac{1}{2}$ נקבל $x_2=\frac{t}{1-t} \Leftarrow N(C,V)=(\frac{1}{2},\frac{t}{1-t})$

עבור $t>\frac{1}{2}$ ניתן להעביר בנקודה $(t,2t)$ ישר תומך עם שיפוע 2- ולכן $N(C,V)=(t,2t)$

$$\Downarrow$$

$$N(C,V)=\begin{cases}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & t\le\frac{1}{3}\\ (\frac{1}{2},\frac{t}{1-t}) & \frac{1}{3}<t\le\frac{1}{2}\\ (t,2t) & t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

3

נשים לב כי למשל הווקטור $X=(a_1,a_2,\dots,a_6)$ בליבה:

יעילות: $\sum_{i\in N}x_i=\sum_{i=1}^{6}a_i=V(N)$

רציונליות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם $|S|<4$, $V(S)=0$ ובאופן מיידי $\sum_{i\in S}x_i\ge 0=V(S)$

אם $|S|\ge 4$, $V(S)=\sum_{i\in S}a_i$ ולכן $\sum_{i\in S}x_i=\sum_{i\in S}a_i=V(S)$

ומכאן מתקיימת רציונליות קואליציונית.

נניח כי קיים וקטור y שונה מ-x בליבה, ווקטור זה מקיים יעילות ולכן סך כל השינויים שמבצעים על x לקבלת הווקטור y הוא 0. כעת נסתכל על הקואליציה N, קיים שם איבר $x_i\ne y_i$ בהכרח. אם $y_i>x_i$ נוציא את i ונישאר עם הקואליציה $N\setminus\{i\}$. אם $y_i<x_i$, קיים בהכרח $j\ne i$ עבורו $x_j<y_j$ כיוון שסכום השינויים צריך להתאפס (אם הוספנו לאיבר כלשהו ערך חיובי, בהכרח ניתן הפרש שלילי לאחר ולהיפך). כעת נוציא מהקואליציה N איבר i שגדול ממש מ-$a_i=x_i$ ולכן

$\sum_{k\in N\setminus\{i\}}y_k<\sum_{k\in N\setminus\{i\}}x_k=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}a_k=V(N\setminus\{i\})$ ולכן לא מתקיימת רציונליות קואליציונית.

$\Leftarrow$ הליבה מורכבת מהווקטור $x=(a_1,a_2,\dots,a_6)$ בלבד.

נשים לב כי הסדרים היחידים בהם התרומה של שחקן 1 איננה 0 הם אלה שבהם הוא שחקן מפתח, נסמנם ב- R_i^1 (שחקן 1 הוא שחקן מפתח וממוקם ה-i) $\Leftarrow$ $V(P_{R_i^1})=0$ & $V(P_{R_i^1}\cup\{1\})=1$

$$\Downarrow$$

$\frac{i-1}{m}<1$ וגם $\frac{i-1}{m}+\frac{2}{3}\geq 1$

$$i<m+1 \qquad \frac{i-1}{m}\geq\frac{1}{3}$$

$$j\geq\frac{m}{3}+1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m}{3}+1\leq j<m+1$$

לכן יש $\frac{2m}{3}$ אפשרויות ל-i ולכל אפשרות כזו יש $m!$ סידורים של שאר השחקנים ולכן בסה"כ $\frac{2m}{3}\cdot m!$ אפשרויות שבהן שחקן 1 הוא שחקן מפתח

$$\varphi_1(v)=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{R_i^1\in\Pi_R}R_i^1=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{2m}{3}\cdot m!=\frac{2m}{3(m+1)}\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{2}{3}$$