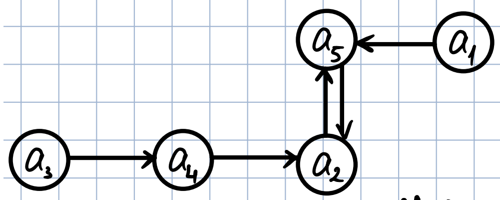
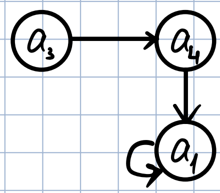
1

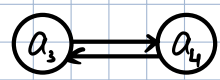
א. נשתמש באלגוריתם ה - TTC למציאת ההקצאה בליבה:



לכן בשלב הראשון נקבע: (a_2, h_5), (a_5, h_2). הגרף לאחר מכן הוא:



בשלב זה נקבע: (a_1, h_1). הגרף לאחר מכן הוא:



בשלב זה נקבע: (a_4, h_3), (a_3, h_4).

בסה״כ $(a_1, h_1), (a_2, h_5), (a_3, h_4), (a_4, h_3), (a_5, h_2)$

2

ידוע מההרצאה כי עבור משחק שיתופי בעל 3 שחקנים, הליבה לא ריקה אמ״מ:

$$x \geq V(1) + V(1,3)$$
$$x \geq V(2) + V(1,3)$$
$$x \geq V(3) + V(1,2)$$
$$x \geq V(1) + V(2) + V(3)$$
$$x \geq \frac{1}{2}\left(V(1,2) + V(2,3) + V(3,4)\right)$$

ב.

$$x \geq V(1) + V(2,3) = 12 + 70 = 82$$
$$x \geq V(2) + V(1,3) = 10 + 50 = 60$$
$$x \geq V(3) + V(1,2) = 20 + 20 = 40$$
$$x \geq V(1) + V(2) + V(3) = 12 + 10 + 20 = 42$$
$$x \geq \frac{1}{2}\left(V(1,2) + V(2,3) + V(3,4)\right) = \frac{1}{2}(20 + 50 + 70) = 70$$

סה״כ נקבל $x \geq 82$

ובפרט עבור $x = 82$ מתקיים כי הווקטור $(12, 14, 56)$ בליבה מאחר שמתקיים:

$$12 = x_1 \geq V(1) = 12$$
$$14 = x_2 \geq V(2) = 10$$
$$56 = x_3 \geq V(3) = 20$$
$$26 = x_1 + x_2 \geq V(1,2) = 20$$
$$68 = x_1 + x_3 \geq V(1,3) = 50$$
$$70 = x_2 + x_3 \geq V(2,3) = 70$$

יציבות קואליציונית

$$82 = x_1 + x_2 + x_3 = V(1,2,3) = 82$$

יעילות

ב.

$$\begin{cases} x \geq V(1)+V(2,3) = 30+70 = 100 \\ x \geq V(2)+V(1,3) = 40+90 = 130 \\ x \geq V(3)+V(1,2) = 50+80 = 130 \\ x \geq V(1)+V(2)+V(3) = 30+40+50 = 120 \\ x \geq \frac{1}{2}\left(V(1,2)+V(2,3)+V(3,4)\right) = \frac{1}{2}(80+90+70) = 120 \end{cases}$$

סה"כ נדרוש $x \geq 130$

ובפרט עבור $x=130$ מתקיים כי הווקטור $(40,40,50)$ בליבה מאחר שמתקיים:

$$\left.\begin{array}{l} 40 = x_1 \geq V(1) = 30 \\ 40 = x_2 \geq V(2) = 40 \\ 50 = x_3 \geq V(3) = 50 \\ 80 = x_1+x_2 \geq V(1,2) = 80 \\ 90 = x_1+x_3 \geq V(1,3) = 90 \\ 90 = x_2+x_3 \geq V(2,3) = 70 \end{array}\right] \text{יציבות קואליציונית}$$

$$130 = x_1+x_2+x_3 = V(1,2,3) = 130 \quad \text{יעילות}$$

(3)

א. שחקן 1 הוא שחקן מפתח אמ"מ $V(P_{R_i})=0$ וגם $V(P_{R_i} \cup 1)=1$.

נשים לב כי אם שחקן 2 נמצא לפני שחקן 1 צריך שיתקיים $\frac{1}{3}+\frac{k-2}{m} < \frac{2}{3}$ ומתקיים מיידית שכאשר נוסיף את שחקן 1 נקבל קואליציה מנצחת.

$$\Downarrow$$

$$m+3k-6 < 2m$$

$$3k < m+6$$

$$2 \leq k < \frac{m}{3}+2$$

במצב זה יש לכל k, $\binom{k-1}{1}m!$ אפשרויות, ויחד עם התנאי הנתון על k,

מיקום שחקן 2 ; שאר m השחקנים

יש $\frac{m}{3}-1$ אופציות ל-k ובסה"כ

$$\sum_{k=2}^{\frac{m}{3}-1} \binom{k-1}{1} m! = m!\sum_{k=2}^{\frac{m}{3}-1}(k-1) = m!\cdot\left(\frac{m}{3}-2\right)\frac{\left(1+\frac{m}{3}-2\right)}{2} = \frac{1}{2}m!\left(\frac{m}{3}-2\right)\left(\frac{m}{3}-1\right)$$ מקרים כנ"ל.

אם שחקן 2 נמצא אחרי שחקן 1 צריך שיתקיים $\frac{k-1}{m} < \frac{2}{3}$ וגם $\frac{1}{3}+\frac{k-1}{m} \geq \frac{2}{3}$

$k < \frac{2}{3}m+1$ וגם $k \geq \frac{1}{3}m+1$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m}{3}+1 \leq k < \frac{2m}{3}+1$$

ותנאי זה נמצא מחוץ לטווח הנתון של k.

לכן סה"כ בסעיף זה קיבלנו $\frac{1}{2}m!\left(\frac{m}{3}-2\right)\left(\frac{m}{3}-1\right)$ מקרים מתאימים.

ב. כעת מהסעיף הקודם יש 2 אפשרויות ל-k אם שחקן 2 בא לפני שחקן 1 ולכל אחת כאלו $m!$ אופציות $\Leftarrow$

$$m!\sum_{k=\frac{m}{3}}^{\frac{m}{3}+1}(k-1) = m!\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{m}{3}-1+\frac{m}{3}\right)}{2} = m!\left(\frac{2}{3}m-1\right)$$ אפשרויות

אם שחקן 2 מגיע אחרי שחקן 1 מתקיים התנאי שמצאנו בסעיף הקודם ולכן יש $\frac{m}{3}$ אופציות ל-k ולכל k יש $\binom{m+2-k}{1}\cdot m!$ אפשרויות:

מיקום שחקן 2   שאר השחקנים

$$\sum_{\frac{m}{3}+1}^{\frac{2}{3}m-1}(m+2-k)\cdot m! = m!\sum_{\frac{m}{3}+1}^{\frac{2}{3}m-1}(m+2-k) = m!\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}m+1+\frac{1}{3}m+3\right) = \frac{1}{2}m!\left(\frac{m}{3}-1\right)(m+4)$$

ג. ערך שפלי הוא תוחלת על התרומות השוליות ולכן סה"כ נספור רק את האפשרויות בהן שחקן 1 הוא שחקן מפתח:

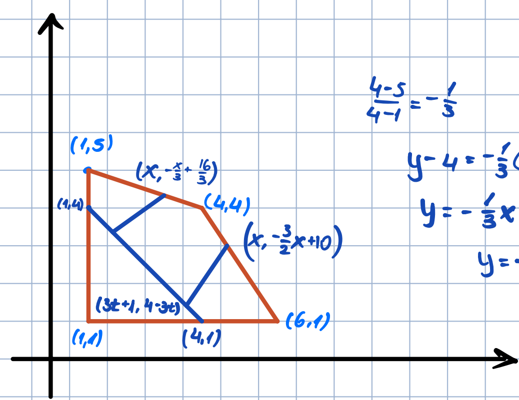
$$\varphi_1(v) = \frac{1}{(m+2)!}\left(\frac{1}{2}m!\left(\frac{m}{3}-2\right)\left(\frac{m}{3}-1\right) + m!\left(\frac{2}{3}m-1\right) + \frac{1}{2}m!\left(\frac{m}{3}-1\right)(m+4) + \underbrace{\left(\frac{m}{3}+2\right)\cdot m!}_{\text{עבור } j=\frac{2m}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2(m+1)(m+2)}\left(\left(\frac{m}{3}-2\right)\left(\frac{m}{3}-1\right) + 2\left(\frac{2}{3}m-1\right) + \left(\frac{m}{3}-1\right)(m+4) + \left(\frac{m}{3}+2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\varphi_1(v) = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{3}-2\right)\left(\frac{m}{3}-1\right) + 2\left(\frac{2}{3}m-1\right) + \left(\frac{m}{3}-1\right)(m+4) + \left(\frac{m}{3}+2\right)}{2(m+1)(m+2)} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m^2}{9}+\frac{m^2}{3}}{2m^2} = \frac{\frac{4}{9}}{2} = \frac{2}{9}$$

4

א.



$$\frac{4-5}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

$$y-4 = -\frac{1}{3}(x-4)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} + 4$$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{16}{3}$$

$$\frac{1-4}{6-4} \le -m \le \frac{4-5}{4-1}$$

$$-\frac{3}{2} \le -m \le -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \le \frac{4-d_2}{4-d_1} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \le \frac{4-(t+4(1-t))}{4-(4t+(1-t))} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \le \frac{3t}{3-3t} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \le \frac{t}{1-t} \le \frac{3}{2}$$

$$1-t \le 3t \qquad\qquad t \le 1.5-1.5t$$

$$4t \ge 1 \qquad\qquad \frac{5}{2}t \le \frac{3}{2}$$

$$t \ge \frac{1}{4} \qquad\qquad t \le \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{5}$$

ג.

$$N(c,v)=\begin{cases}\left(\frac{5}{2}+6t,\ \frac{9}{2}+2t\right) & 0\le t<\frac{1}{4}\\ (4,4) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{3}{5}\\ \left(\frac{5(t+1)}{2},\ -\frac{15}{4}t+\frac{25}{4}\right) & t>\frac{3}{5}\end{cases}$$

$\underline{t<\frac{1}{4}}$: נשתמש במיפוי הגיאומטרי ונקבל שהפתרון מתקבל על הישר שמחבר בין $(4,4)$, $(6,1)$

$$m_{d_t}=\frac{-\frac{x}{3}+\frac{16}{3}-4+3t}{x-3t-1}=\frac{-x+4+9t}{3x-9t-3}=\frac{1}{3}=-m_{(\text{הישר בין } (4,4) \text{ ובין } (6,1))}$$

$$-3x+12+27t=3x-9t-3$$

$$15+36t=6x \qquad /:3$$

$$5+12t=2x$$

$$x=\frac{5}{2}+6t$$

$$y=-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}+6t\right)+\frac{16}{3}$$

$$=-\frac{5}{6}+2t+\frac{32}{6}$$

$$=\frac{27}{6}+2t=\frac{9}{2}+2t$$

$\underline{t>\frac{3}{5}}$: נשתמש במיפוי הגיאומטרי ונקבל שהפתרון מתקבל על הישר שמחבר בין $(4,4)$, $(1,5)$

$$m_{d_t}=\frac{-\frac{3}{2}x+10-(4-3t)}{x-(3t+1)}=\frac{-\frac{3}{2}x+10-4+3t}{x-3t-1}$$

$$m_{d_t}=\frac{-3x+6t+12}{2x-6t-2}=\frac{3}{2}=-m_{(\text{הישר בין } (4,4) \text{ ובין } (1,5))}$$

$$2(-3x+6t+12)=3(2x-6t-2)$$

$$-6x+12t+24=6x-18t-6$$

$$30t+30=12x$$

$$x=\frac{30(t+1)}{12}$$

$$x=\frac{5(t+1)}{2}$$

$$y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{5(t+1)}{2}+10$$

$$-\frac{15}{4}t-\frac{15}{4}+10$$

$$-\frac{15}{4}t+\frac{25}{4}$$