(1)

נראה כי מתקיים $\lambda V_w \mu = \lambda \Lambda_M \mu$:

בשידוך $\lambda V_w \mu$ מתקיים $\lambda V_w \mu(w) = m$ $\Leftrightarrow$ בה"כ $\lambda(w) \leq_w \mu(w) = m$. נשים לב כי:

אם $w \geq_m \lambda(m)$ אז λ שידוך לא יציב כיוון ש-(m,w) זוג חוסם ב-λ. ולכן בהכרח

$w \leq_m \lambda(m)$ $\Leftarrow$ בשידוך $\lambda V_w \mu$, גבר m מהכרח מקבל את האישה שפחות מועדפת עליו

מכן $\mu(m), \lambda(m)$ $\Leftarrow$ $\lambda V_w \mu = \lambda \Lambda_M \mu$.

אם כן $\lambda V_w \mu$ שידוך יציב לפי ההרצאה (בהרצאה ראינו $\lambda V_M \mu$ שידוך יציב ובסימטריה גם $\lambda V_w \mu$ שידוך יציב).

(2)

$$C = \{(x_1,x_2): (x_1-1)^2 + 4x_2^2 \leq 2\} \xrightarrow[x_2 = \frac{1}{2}y_2]{x_1 = y_1+1} C' = \{(y_1,y_2): y_1^2 + y_2^2 \leq 2\}$$

ומתקיים $(d_1,d_2) = (\frac{5}{4}, \frac{1}{8}) \longrightarrow (d_1', d_2') = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

$\Leftarrow$ קיבלנו C' תחום סימטרי עם $d_1' = d_2'$ ולכן פתרון נאש בו מתקיים $y_1^* = y_2^*$ על השפה

$$2y_1^* = 2$$
$$y_1^* = y_2^* = 1$$
$$\Downarrow$$
$$y_1^* = 1 \Rightarrow x_1^* = y_1^* + 1 = 2$$
$$y_2^* = 1 \Rightarrow x_2^* = \frac{1}{2} y_2^* = \frac{1}{2}$$
$$N(C,V) = (2, \tfrac{1}{2})$$

(3)

א. 4 האקסיומות: יעילות
סימטריה
אדטיביות
שחקן 0

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus i} (V(S \cup i) - V(S)) = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot Sh_i(V)$$

<u>סימטריה</u>: מאחר ש- $\varphi_i(v) = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot Sh_i(V)$, ומאחר שערך שפלי מקיים סימטריה, לכל שחקנים סימטריים i,j $Sh_i(V) = Sh_j(V)$ ולכן $\varphi_i(v) = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot Sh_i(V) = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot Sh_j(V) = \varphi_j(v)$

ולכן φ מקיים סימטריה

יעילות: לא מתקיימת. למשל $\{1; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

מסכימה עבור שחקן 1 ישארו רק אופציות בהן הוא שחקן מפתח, לכן יש $1\cdot 2!$

שחקן 1 במקום 3 · לסדר את השאר

$$\varphi_1(v)=\frac{1}{2^2}\cdot 1\cdot 2!\cdot 1=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

מסימטריה נקבל $\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\varphi_3(v)=\frac{1}{2} \Leftarrow \varphi_1(v)+\varphi_2(v)+\varphi_3(v)=\frac{3}{2}\neq 1$

<u>שחקן 0:</u> מאחר שערך שפלי מקיים שחקן 0, בהינתן i שהוא שחקן 0 מתקיים $Sh_i(v)=0$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i(v)=\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot Sh_i(v)=0$$

ולכן φ מקיים שחקן 0

<u>אדיטיביות:</u> ערך שפלי מקיים אדיטיביות ולכן בהינתן v, w $\quad Sh(v+w)=Sh(v)+Sh(w)$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(v+w)=\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot Sh(v+w)=\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot(Sh(v)+Sh(w))=\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot Sh(v)+\frac{n!}{2^{n-1}}\cdot Sh(w)=\varphi(v)+\varphi(w)$$

ולכן φ מקיים אדיטיביות

ב. נחשב תחילה את ערך שפלי לכל שחקן. נשים לב כי יש 3 סוגים של שחקנים ולכן מספיק לחשב עבורם.

$$Sh_1(v)=\frac{1}{6!}\cdot(5\cdot 4!+10\cdot 3!)=\frac{1}{4} \qquad R_1^1=0\ ;\ R_1^2=5\cdot 4!\ ;\ R_1^3=(2\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 1)\cdot 3!$$

5 אפשרויות למספר במקום 1
4 מס' נשארו לסדר
עבור האפשרות במקומות 3,1 ו-2 יש 2 אפשרויות ל-3 ו-2 אפשרויות ל-1
עבור האפשרות במקומות 1,3 ו-2 יש 2 אפשרויות ל-3 ו-2 אפשרויות ל-1
עבור האפשרות במקומות 1,1 ו-2 יש 2 אפשרויות ל-1 ויש אפשרות אחת ל-1
סידור 3 המס' שנשארו

$$Sh_3(v)=\frac{1}{6!}\cdot(3\cdot 4!+6\cdot 3!)=\frac{3}{20} \qquad R_3^1=0\ ;\ R_3^2=3\cdot 4!\ ;\ R_3^3=(2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1)\cdot 3!$$

עבור האפשרות במקומות 3,1 ו-2 יש אפשרות אחת ל-3 ו-2 אפשרויות ל-1
עבור האפשרות במקומות 1,3 ו-2 יש אפשרות אחת ל-3 ו-2 אפשרויות ל-1
עבור האפשרות במקומות 1,1 ו-2 יש 2 אפשרויות ל-1 ויש אפשרות אחת ל-1
סידור 3 המס' שנשארו

$$Sh_5(v)=\frac{1}{6!}(2\cdot 4!+4\cdot 3!)=\frac{1}{10} \qquad R_4^1=0\ ;\ R_4^2=2\cdot 4!\ ;\ R_4^3=(2\cdot 1+1\cdot 2)\cdot 3!$$

עבור האפשרות במקומות 3,1 ו-2 יש 2 אפשרויות ל-3 ואפשרות אחת ל-1
עבור האפשרות במקומות 3,1 ו-2 יש אפשרויות ל-3 ואפשרות אחת ל-1
סידור 3 המס' שנשארו

נבדוק שיצא נכון $\quad 2\cdot Sh_1(v)+2\cdot Sh_3(v)+2\cdot Sh_5(v)=1$ ✓

$$\Downarrow$$

$$\varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\frac{6!}{2^5}Sh_1(v)=\frac{45}{8}$$

$$\varphi_3(v)=\varphi_4(v)=\frac{6!}{2^5}Sh_3(v)=\frac{27}{8}$$

$$\varphi_5(v)=\varphi_6(v)=\frac{6!}{2^5}Sh_5(v)=\frac{9}{4}$$

א. יעילות:

$$\sum_{i\in N} x_i = \cancel{V(1)}+V(\{\cancel{1},2\})-\cancel{V(1)}+V(\{\cancel{1,2},3\})-\cancel{V(\{1,2\})}\cancel{+\dots}+V(N)-V(\{1,\dots,N-1\}) = V(N)$$

יציבות קואליציונית: נסתכל על $|S|=k$. נסמן $S=\{i_1,\dots i_{k+1}\}$

$$\sum_{i\in S} x_i = \sum_{j=1}^{k}\left(V(\{1,\dots i_{j-1},i_j\})-V(\{1,\dots,i_{j-1}\})\right) \underset{\text{קמירות}}{\geq} \sum_{j=1}^{k}\left(V(\{i_1,\dots i_j\})-V(\{i_1,\dots i_{j-1}\})\right) = V(\{i_1,\dots i_k\}) = V(S)$$

⇐ מתקיימת יציבות קואליציונית ולכן מסה"כ $(V(1), V(\{1,2\})-V(1),\dots V(\{1,\dots n\})-V(\{1,\dots,n-1\}))\in C(V,N)$

ב. יעילות: נסמן את הסידור R: $\{i_1,i_2\dots i_n\}$ ואז:

$$\sum_{i\in N} x_i^R = \sum_{i\in N}\left(V(P_i^R\cup i)-V(P_i^R)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(V(\{i_1,\dots i_j\})-V(\{i_1,\dots i_{j-1}\})\right) \underset{\text{טור טלסקופי}}{=} V(\{i_1,\dots i_n\}) = V(N)$$

יציבות קואליציונית: תהא S, נסמן $|S|=k$ ואז נסדר את איברי S לפי סדר הופעתם ב-R.

$$S=\{r_1,r_2\dots r_k\}$$

$$\sum_{i\in S} x_i^R = \sum_{i\in S}\left(V(P_i^R\cup i)-V(P_i^R)\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(V(\{i_1,\dots i_j\})-V(\{i_1,\dots i_{j-1}\})\right) \underset{\text{קמירות}}{\geq} \sum_{j=1}^{k}\left(V(\{r_1,\dots r_j\})-V(\{r_1,\dots r_{j-1}\})\right)$$

$$\underset{\text{טור טלסקופי}}{=} V(\{r_1,\dots r_k\}) = V(S)$$

ג. ידוע כי ערך שפלי מקיים יעילות (אחת מ-4 האקסיומות).

נראה כי ערך שפלי מקיים יציבות קואליציונית (במצב הנתון):

תהא קואליציה S, נסמן $|S|=k$ ואז

$$\sum_{i\in S} x_i = \sum_{i\in S} Sh_i(V) = \sum_{i\in S}\frac{1}{n!}\sum_{R\in\Pi_R}\left(V(P_i^R\cup i)-V(P_i^R)\right) = \frac{1}{n!}\sum_{i\in S}\sum_{R\in\Pi_R}\left(V(P_i^R\cup i)-V(P_i^R)\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{R\in\Pi_R}\sum_{i\in S}\left(V(P_i^R\cup i)-V(P_i^R)\right) \underset{\text{סעיף ב}}{\geq} \frac{1}{n!}\sum_{R\in\Pi_R} V(S) = \frac{1}{n!}\cdot n!\cdot V(S) = V(S)$$

⇐ ערך שפלי נמצא בליבה.