1

מספיק לחשב את ערך שפלי של שחקן 1 ושחקן 3 (אחד מכל סוג). התוספת של שחקן 1 היא 0 או 1 או 2.

אם שחקן 2 נמצא אחרי שחקן 1: אם שחקן 1 במקום 1 התוספת שלו היא 0

אם שחקן 1 במקום 2 התוספת שלו היא 1, מס' האפשרויות: $8\cdot 8! = \binom{8}{1}\cdot 8!$

מיקום שחקן 2

סידור שאר השחקנים

אם שחקן 1 במקום $3\le i\le 9$ התוספת שלו היא 2 מס' האפשרויות:

$$\binom{10-i}{1} 8!$$

מיקום שחקן 2 אחרי 1

סידור השחקנים הימנים

$$\sum_{i=3}^{9}\binom{10-i}{1} 8! = 8!\sum_{i=3}^{9}(10-i) = 8!\cdot\frac{7}{2}\cdot(7+1) = 28\cdot 8!$$

אם שחקן 2 נמצא לפני שחקן 1: אם שחקן 1 במקום 2-4 התוספת שלו היא 0

אם שחקן 1 במקום 5 התוספת שלו היא 1. מס' האפשרויות לכך:

$$\binom{4}{1}\cdot 8! = 4\cdot 8!$$

מיקום שחקן 2

מיקום שאר השחקנים

אם שחקן 1 במקום 6-10 התוספת שלו היא 2. מס' האפשרויות לכך:

$$\binom{i-1}{1}\cdot 8!$$

מיקום שחקן 2

מיקום שאר השחקנים

$$\sum_{i=6}^{10}\binom{i-1}{1}\cdot 8! = 8!\sum_{i=6}^{10}(i-1) = 8!\cdot\frac{5}{2}\cdot(9+5) = 35\cdot 8!$$

$$\Rightarrow \varphi_1(v)=\varphi_2(v)=\frac{1}{10!}\left(1\cdot(4\cdot 8!+8\cdot 8!)+2(35\cdot 8!+28\cdot 8!)\right)=\frac{23}{15}$$

ונשתמש ביעילות ערך שפלי כדי למצוא את $\varphi_{3-10}(v)$ נקבל: $2\cdot\varphi_1(v)+8\cdot\varphi_{3-10}(v) = 4 = v(N)$

$$2\cdot\frac{23}{15}+8\cdot\varphi_{3-10}(v)=4$$

$$\varphi_{3-10}(v)=0.116$$

2

לא בחומר

3

א. $\Leftarrow$

נניח כי הליבה לא ריקה $\Leftarrow$ לכל אוסף מאוזן B קיים וקטור מאזן δ_S כך ש- $\sum_{S\in B}\delta_S V(S) \le V(N)$
מפרט עבור האוסף המאוזן B שמכיל n קבוצות מגודל k כך שכל איבר מופיע k פעמים באוסף,

(למשל
$n=3$, $k=2$: $1,2,3$, $B=(1,2),(1,3),(2,3)$
$n=4$, $k=2$: $1,2,3,4$, $B=(1\ 2),(1\ 3),(3\ 4),(2\ 4)$)

נקבל $\delta_S=(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k})$ ולכן $\frac{n}{k}\cdot f(k)=\sum_{S\in B}\delta_S \underset{f(k)}{V(S)}\le V(N)=f(n)$ $\Leftarrow$ $f(k)\le\frac{k}{n}\cdot f(n)$

$\Rightarrow$

נניח כי מתקיים $f(k)\le\frac{k}{n}\cdot f(n)$ לכל $k\in\{1,\dots,n\}$, נראה כי $X=(\frac{f(n)}{n},\dots,\frac{f(n)}{n})\in C(V,N)$:

יעילות: $\sum_{i\in N}X_i=\sum_{i\in N}\frac{f(n)}{n}=n\cdot\frac{f(n)}{n}=f(n)=V(N)$

קבוצות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$ אזי מתקיים $V(S)=f(k)\underset{\text{ע"פ הנחה}}{\le}\frac{k}{n}\cdot f(n)=k\cdot\frac{f(n)}{n}=\sum_{i\in S}X_i$

$\Leftarrow$ $X\in C(V,N)$ ובפרט הליבה לא ריקה.

ב. $f(k)=\begin{cases}C & k=9\\ k^2 & else\end{cases}$.

משחק הוא משחק שוק אמ"מ מאוזן לחלוטין $\Leftrightarrow$ כל תת משחק שלו עם ליבה לא ריקה.

אם כך, נסתכל על תת המשחק (T,I) כאשר $T\subseteq V$ וגם $I\subseteq N$.

אם $I<9$ $\Leftarrow$ לכל $S\in I$ מתקיים $f(|S|)=|S|^2\le|S|\cdot|I|=\frac{|S|}{|I|}\cdot|I|^2=\frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|)$

אם $I=9$ $\Leftarrow$ לכל $S\in I$ מתקיים $f(|S|)\underset{\text{אם }|S|<9}{=}|S|^2\underset{\text{נדרוש}}{\le}\frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|)=\frac{|S|}{9}\cdot C$

$$|S|^2\le\frac{|S|}{9}\cdot C$$

$$|S|\le\frac{C}{9}$$ לכל היותר 8

$$8\le\frac{C}{9}$$

$$C\ge 72$$

אם $|S|=9$ אז $f(|S|)=C\le\frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|)=\frac{9}{9}\cdot C$

אם $I=10$ ⇐ תהא $S\in I$ מתקיים $f(|S|) = |S|^2 \le |S|\cdot|I| = \frac{|S|}{|I|}\cdot |I|^2 = \frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|)$

$\underset{|S|\neq 9 \text{ אם}}{=}$

$$f(|S|) \underset{|S|=9 \text{ אם}}{=} C \underset{\text{נדרוש}}{\le} \frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|) = \frac{9}{10}\cdot 100 = 90$$

$$\Downarrow$$

$$C \le 90$$

ולכן לפי המשפט מספיק ש הליבה של (T,I) לא ריקה עבור $72 \le C \le 90$.

אם כן קיבלנו כי הליבה של כל תת משחק לא ריקה ולכן הוא מאוזן לחלוטין ⇐ משחק שוק.