(1)

א. קיימים n סוכנים וכל סוכן יכול להיות מגורש לכל היותר מ-$n-1$ בתים לפני שמקבל את הבית שנשאר לו (שלו). אם כן חסם עליון על מספר השלבים באלגוריתם הוא $n(n-1)$ ובפרט מספר השלבים סופי.

בסוף התהליך התור ריק ⇐ כל הסוכנים נמצאים בבתים, ומאחר שבהגדרת האלגוריתם בבית יכול להימצא לכל היותר סוכן יחיד נקבל שבכל בית יש בדיוק סוכן אחד ולכן התקבלה השמה.

ב. ההשמה מקיימת סבירות פרטית כיוון שבמקרה הגרוע סוכן יקבל את ביתו ואף אחד לא יוכל לגרשו. במקרה הטוב יקבל בית שמעדיף על ביתו, ולכן אם נסמן ב-μ את ההשמה המתקבלת, מתקיים $\mu(i) \succeq_i h_i$ ולכן מתקיימת סבירות פרטית.

ג. ההשמה לא מקיימת יעילות. למשל

$$\succ_{a_1}\ h_3, \underline{h_1}, h_2$$
$$\succ_{a_2}\ h_3, \underline{h_2}, h_1$$
$$\succ_{a_3}\ h_2, \underline{h_3}, h_1$$

מספר $\overrightarrow{3,1,2}$

a_3 הולך ל-h_2, a_1 הולך ל-h_3, a_2 ל-h_2 ומגרש את a_3, שהולך ל-h_3 ומגרש את h_1 שהולך ל-h_1

וסה"כ ההשמה המתקבלת $(a_1,h_1),(a_2,h_2),(a_3,h_3) = \mu$

ולמשל ההשמה $(a_1,h_1),(a_2,h_3),(a_3,h_2)$ שולטת על μ

(2)

$$C = \{(x_1,x_2) : (x_1-1)^2 + 4x_2^2 \le 2\} \xrightarrow[\substack{y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = 2x_2}]{} C' = \{(y_1,y_2) : y_1^2 + y_2^2 \le 2\}$$

בנוסף $d = (\frac{5}{4}, \frac{1}{8}) \longrightarrow d' = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ⇐ קיבלנו תחום C' סימטרי עם $d'_1 = d'_2$ ולכן $y_1^* = y_2^*$
והפתרון יתקבל על שפת התחום

$$2y_1^* = 2$$
$$y_1^* = y_2^* = 1$$
$$x_1^* = y_1^* + 1 = 2$$
$$x_2^* = \frac{1}{2} y_2 = \frac{1}{2}$$
$$N(C,v) = (2, \tfrac{1}{2})$$

א. ניקח למשל את הווקטור $X=(100,0\ldots0)$ ונראה כי הוא בליבה:

יעילות: $\sum_{i\in N} X_i = 100 = (11-1)^2 = V(N)$

רציונליות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם $1\in S$ אז $V(S)=(|S|-1)^2 \le (11-1)^2 = \sum_{i\in S} X_i = 100$

אם $1\notin S$ אז $V(S)=0 \le \sum_{i\in S} X_i = 0$

ולכן הליבה לא ריקה

ב. נסמן את התשלום של $X_2=\mathcal{E}$ ואז מתקיים לפי יעילות לכל $X\in C(V,N)$: $\sum_{i\in N} X_i = \sum_{i\in N\setminus 2} X_i + X_2 = V(N)$

$$\sum_{i\in N\setminus 2} X_i = V(N)-X_2$$
$$\sum_{i\in N\setminus 2} X_i = 100-\mathcal{E}$$

נדרוש רציונליות קואליציונית: עבור $S=N\setminus 2$ צריך שיתקיים:

$$\sum_{i\in N\setminus 2} X_i = 100-\mathcal{E} \ge (|S|-1)^2 = (10-1)^2 = 81$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{E}\le 19$$

למשל הווקטור $X=(81,19,0\ldots0)$ נמצא בליבה כיוון שמתקיים:

יעילות: $\sum_{i\in N} X_i = 100 = (11-1)^2 = V(N)$

רציונליות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם $1,2\in S$ אז $V(S)=(|S|-1)^2 \le (11-1)^2 = \sum_{i\in S} X_i = 100$

אם $1\in S$, $2\notin S$ אז $V(S)=(|S|-1)^2 \le (10-1)^2 = \sum_{i\in S} X_i = 81$

אם $1\notin S$ אז $V(S)=0 \le \sum_{i\in S} X_i = 0$

ג. התשלום המינימלי שיכול לקבל שחקן 1 הוא 0, למשל: $X=(0,10,10\ldots10)\in C(V,N)$

יעילות: $\sum_{i\in N} X_i = 100 = (11-1)^2 = V(N)$

רציונליות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם $1\in S$ אז $V(S)=(|S|-1)^2 \overset{?}{\le} \sum_{i\in S} X_i = 10\cdot(|S|-1)$

$$\Updownarrow$$
$$|S|^2-2|S|+1 \le 10|S|-10$$
$$\Updownarrow$$
$$|S|^2-12|S|+11 \le 0$$
$$\Updownarrow$$
$$1\le |S| \le 11 \quad \text{(מתקיים)}$$

אם $1\notin S$ אז $V(S)=0 \le \sum_{i\in S} X_i = 0$

לא יכול להיות $X_1<0$ כיוון שאז $V(S=\{1\})=(1-1)^2=0>X_1$ ולא יתקיים רציונליות קואליציונית.

סעיף א:

$$\frac{1}{n}\Big(V(N)-V(N\setminus\{i\})+\sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\},V)\Big)=\frac{1}{n}\Big(V(N)-V(N\setminus\{i\})+\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\frac{1}{(n-1)!}\Big(\underbrace{\sum_{R_i\in\Pi_R^j}}_{\text{קבוצת כל הסידורים של } N\setminus\{j\}}\big(V(P_{R_i}\cup i)-V(P_{R_i})\big)\Big)\Big)$$

$$=\frac{1}{n\cdot((n-1)!)}\Big((n-1)!\big(V(N)-V(N\setminus\{i\})\big)+\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\Big(\sum_{R_i\in\Pi_R^j}\big(V(P_{R_i}\cup i)-V(P_{R_i})\big)\Big)\Big)$$

$$=\frac{1}{n!}\Big((n-1)!\big(V(N)-V(N\setminus\{i\})\big)+\underbrace{\sum_{R_i\in\Pi_R^j}\Big(\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\big(V(P_{R_i}\cup i)-V(P_{R_i})\big)\Big)}\Big)=\frac{1}{n!}\cdot\sum_{R_i\in\Pi_R}\big(V(P_{R_i}\cup i)-V(P_{R_i})\big)=Sh_i(V)$$

כל הסידורים חוץ מאלה ש-i במקום n כי בכל פעם יש n-1 שחקנים אך בגלל שמוציאים מכל פעם j שונה מקבלים את כל הסידורים חוץ מאלו שבהם i במקום n

מספר הסידורים שבהם i במקום n הוא (n-1)! בדיוק

סעיף ב:

נראה כי הביטוי מקיים את 4 האקסיומות ומכך נקבל כי מזדהה עם ערך שפלי לפי המשפט מההרצאה שלפיו ערך שפלי היא הערך היחיד שמקיים את כל 4 התכונות:

שחקן 0: נניח כי i שחקן 0, אם כך $V(S\setminus i)=V((S\setminus i)\cup i)$ לכל $S\subseteq N$

$$\varphi_i(N,V)=\frac{1}{n}\Big(\underbrace{V(N)-V(N\setminus\{i\})}_{0}+\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\underbrace{Sh_i(N\setminus\{j\},V)}\Big)=0$$

אם i שחקן 0 ב-(N,V), הוא שחקן 0 בכל תת משחק שלו

אם i שחקן 0 אז $Sh_i=0$

יעילות:

$$\sum_{i\in N}\varphi_i(N,V)=\sum_{i\in N}\Big(\frac{1}{n}\Big(V(N)-V(N\setminus\{i\})+\sum_{j\in N\setminus\{i\}}Sh_i(N\setminus\{j\},V)\Big)\Big)=$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in N}\big(V(N)-V(N\setminus\{i\})\big)+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i\in N}\cdot\sum_{j\in N\setminus\{i\}}Sh_i(N\setminus\{j\},V)=$$

$$=V(N)-\frac{1}{n}\sum_{i\in N}V(N\setminus\{i\})+\frac{1}{n}\sum_{i\in N}V(N\setminus\{i\})=V(N)$$

יעילות של ערך שפלי בכל תת משחק

סימטריה: יהיו $i,k\in N$ שחקנים סימטריים, אם כך $V(S\cup i)=V(S\cup k)$ לכל $S\subseteq N$

$$\varphi_i(N,V)=\frac{1}{n}\Big(V(N)-V(N\setminus\{i\})+\sum_{j\in N\setminus\{i\}}Sh_i(N\setminus\{j\},V)\Big)=\frac{1}{n}\Big(V(N)-V(N\setminus\{k\})+\sum_{j\in N\setminus\{k\}}Sh_i(N\setminus\{j\},V)\Big)=\varphi_k(V)$$

i,k סימטריים גם בכל תת משחק ולפי ערך שפלי שלהם בכל תת משחק יהיו זהים

אדיטיביות:

$$\varphi_i(v+w) = \frac{1}{n}\Big((v+w)(N) - (v+w)(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, v+w)\Big) =$$

אדיטיביות
של ערך שפלי
לכל תת משחק

$$= \frac{1}{n}\Big((v+w)(N) - (v+w)(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, v) + Sh_i(N\setminus\{j\}, w)\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\Big(v(N) + w(N) - v(N\setminus\{i\}) - w(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, v) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, w)\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\Big(v(N) - v(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, v)\Big) + \frac{1}{n}\Big(w(N) - w(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i(N\setminus\{j\}, w)\Big)$$

$$= \varphi_i(v) + \varphi_i(w)$$