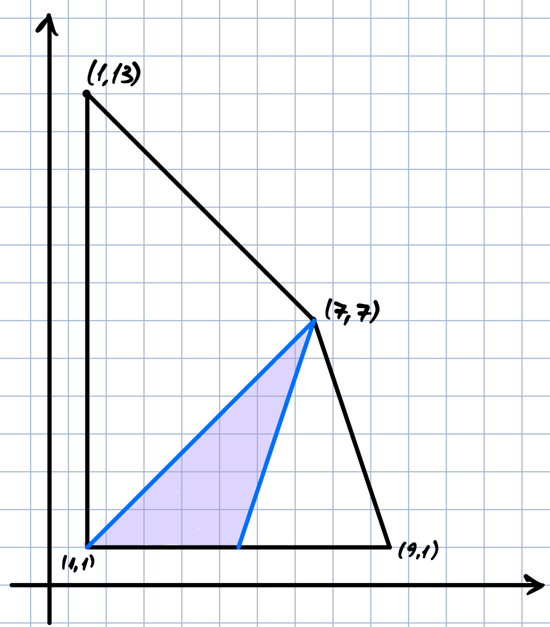
1

$$M_+ = \{ m\in M \mid \mu(m) >_m \lambda(m) \}$$

$$W_- = \{ w\in W \mid \lambda(w) >_w \mu(w) \}$$

נניח בשלילה כי קיים $m\in M_+$ עבורו מתקיים $w=\mu(m)\notin W_- \Rightarrow \mu(w) \geq_w \lambda(w)$. אם כך מאחר ש-$m\in M_+$ מתקיים גם $\mu(m) >_m \lambda(m)$ ובסה"כ קיבלנו ש-m מעדיף את $\mu(m)=w$ על פני $\lambda(m)$ וגם w מעדיפה את $\mu(w)=m$ על פני $\lambda(w)$ ולכן (w,m) זוג חוסם ב-λ בסתירה לכך ש-λ שידוך יציב.

2



$$\frac{1-7}{9-7} \leq -\frac{7-d_2}{7-d_1} \leq \frac{7-13}{7-1}$$

$$1 \leq \frac{7-d_2}{7-d_1} \leq 3$$

$7-d_1 \leq 7-d_2$

$d_2 \leq d_1$

$7-d_2 \leq 3(7-d_1)$

$7-d_2 \leq 21-3d_1$

$d_2 \geq 3d_1-14$

א. עבור $0<\alpha\le\frac{1}{2}$, שחקן 1 הוא שחקן מפתח ברגע שמצטרף לקואליציה שערכה קטן מ-α כיון שערכו של שחקן 1 הוא $\frac{1}{2}$. נסמן את R_i את הסידורים מהם שחקן 1 הוא שחקן מפתח ובמקום ה-i.

$$\Downarrow$$

נדרוש: $\frac{i-1}{m}<\alpha$

$$1\le i< m\alpha+1$$

אם כן יש ~$m\alpha$ אפשרויות ל-i ולכל אפשרות כזו יש $m!$ סידורים ולכן נקבל

$$Sh_1(V_m(\alpha))=\frac{1}{(m+1)!}\cdot m\alpha\cdot m!=\alpha\cdot\frac{m}{m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}\alpha$$

ב. עבור $\frac{1}{2}<\alpha\le1$, שחקן 1 הוא שחקן מפתח אם $V(P_{R_i}\cup 1)\ge\alpha$ & $V(P_{R_i})<\alpha$

$$\frac{i-1}{m}<\alpha \qquad\qquad \frac{i-1}{m}+\frac{1}{2}\ge\alpha$$

$$i<\alpha m+1 \qquad\qquad 2(i-1)+m\ge2\alpha m$$

$$i\ge\frac{m(2\alpha-1)}{2}+1$$

$$\Downarrow$$

$$m\alpha-\frac{m}{2}+1\le i<\alpha m+1$$

כעת יש $\frac{m}{2}$ אפשרויות ל-i ולכל i כזה יש $m!$ אפשרויות ולכן יש $\frac{m}{2}\cdot m!$ סידורים מתאימים

$$Sh_1(V_m(\alpha))=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{m}{2}\cdot m!=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

4

א. משחק סימטרי אם הערך של הקואליציה תלוי רק בגודל הקואליציה.

($\Rightarrow$)

נניח כי מתקיים $f(k) \le \frac{k}{n} f(n)$ וצ"ל $C(v,N) \neq \emptyset$

נראה כי הווקטור $x=\left(\frac{f(n)}{n}, \frac{f(n)}{n}, \dots, \frac{f(n)}{n}\right)$ נמצא בליבה:

יעילות: $\sum_{i\in N} x_i = \sum_{i\in N}\frac{f(n)}{n} = n\cdot\frac{f(n)}{n} = f(n) = V(N)$

רציונליות קואליציונית: $V(S) = f(k) \underset{\text{נתון}}{\le} \frac{k}{n}\cdot f(n) = k\cdot\frac{f(n)}{n} = \sum_{i\in S} x_i$ (נניח $|S|=k$)

($\Leftarrow$)

נניח כי מתקיים $C(v,N)\neq\emptyset$, וצ"ל $f(k)\le\frac{k}{n}f(n)$

מההנחה הליבה לא ריקה ולכן לכל אוסף מאוזן D עם δ_S מתקיים $\sum_{S\in D}\delta_S V(S) \le V(N)$

בפרט עבור האוסף של n תתי קבוצות בגודל $|S|$, כל איבר מופיע $|S|$ פעמים

$$\Downarrow$$

$$\delta_S = \left(\frac{1}{|S|}, \frac{1}{|S|}, \dots, \frac{1}{|S|}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{S\in D}\delta_S V(S) = \sum_{S\in D}\frac{1}{|S|}V(S) = \frac{1}{|S|}\cdot n\cdot V(S) \le V(N)$$

$$\Downarrow$$

$$V(S)\le\frac{|S|}{n}V(N)$$

$$f(k)\le\frac{k}{n}f(n)$$

ב. $f(k)=\begin{cases} C & k=9\\ k^2 & else\end{cases}$.

משחק הוא משחק שוק אמ"מ מאוזן לחלוטין $\Leftrightarrow$ כל תת משחק שלו עם ליבה לא ריקה.

אם כן, נסתכל על תת המשחק (T,I) כאשר $T\subseteq V$ וגם $I\subseteq N$.

אם $I<9$ $\Leftarrow$ לכל $S\in I$ מתקיים: $f(|S|)=|S|^2 \le |S|\cdot|I| = \frac{|S|}{|I|}\cdot|I|^2 = \frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|)$

אם $I=9$ $\Leftarrow$ לכל $S\in I$ מתקיים: $f(|S|) \underset{\text{אם } |S|<9}{=} |S|^2 \underset{\text{נדרוש}}{\le} \frac{|S|}{|I|}\cdot f(|I|) = \frac{|S|}{9}\cdot C$

$$|S|^2\le\frac{|S|}{9}\cdot C$$

$$|S|\le\frac{C}{9}$$

לכל היותר 8

$$8\le\frac{C}{9}$$

$$C\ge72$$

אם $|S|=9$ אז $f(|S|) = C \leq \frac{|S|}{|I|} \cdot f(|I|) = \frac{9}{9} \cdot C$

אם $I=10$ $\Leftarrow$ תהא $S \in I$ מתקיים $f(|S|) \underset{\text{אם } |S|\neq 9}{=} |S|^2 \leq |S| \cdot |I| = \frac{|S|}{|I|} \cdot |I|^2 = \frac{|S|}{|I|} \cdot f(|I|)$

$$f(|S|) \underset{\text{אם } |S|=9}{=} C \underset{\text{נדרוש}}{\leq} \frac{|S|}{|I|} \cdot f(|I|) = \frac{9}{10} \cdot 100 = 90$$

$$\Downarrow$$

$$C \leq 90$$

ולכן לפי המשפט מסעיף א הליבה של (T, I) לא ריקה עבור $72 \leq C \leq 90$.

אם כן קיבלנו כי הליבה של כל תת משחק לא ריקה ולכן הוא מאוזן לחלוטין $\Leftarrow$ משחק שוק.