1

נחשב ערך שפלי: שאנו מספיקים רק אימרים שבהם שחקן 1 הוא שחקן מפתח ⟸ $V(P_{R_i'} \cup i) = 1$ & $V(P_{R_i'}) = 0$.

אם שחקן 2 נמצא לפני שחקן 1, ברגע ששחקן 1 נמצא גם הוא בקואליציה באופן מיידי ערכה גדול מ-$\frac{1}{2}$ ולכן יש לדרוש את התנאי הבא בלבד: $\frac{1}{3} + \frac{i-2}{3n} < \frac{1}{2}$ (i הוא מיקום שחקן 1)

$$\Downarrow$$

$$2n + 2(i-2) < 3n$$

$$2(i-2) < n$$

$$2 \le i < \frac{n}{2} + 2$$

ולכן לכל אפשרות נצטרך תחילה למקם את שחקן 2 - $\binom{i}{1}$ אופציות ולאחר מכן מס' האפשרויות לסידור שאר השחקנים - $n!$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}+1} \binom{i}{1} \cdot n! = n! \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}+1} i = n! \left(\frac{\frac{n}{2}\left(2 + \frac{n}{2} + 1\right)}{2} \right) = \frac{1}{2} n! \cdot \left(\frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} \right)$$

אם שחקן 2 נמצא אחרי שחקן 1, נדרוש $\frac{i-1}{3n} + \frac{1}{3} \ge \frac{1}{2}$ וגם $\frac{i-1}{3n} < \frac{1}{2}$

$$2(i-1) + 2n \ge 3n \qquad 2(i-1) < 3n$$

$$2i - 2 \ge n \qquad i < \frac{3}{2}n + 1$$

$$i \ge \frac{n}{2} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{2} + 1 \le i < \frac{3}{2}n + 1$$

ומאחר שלכל היותר $i = n+1$ נקבל $\frac{n}{2} + 1 \le i \le n+1$

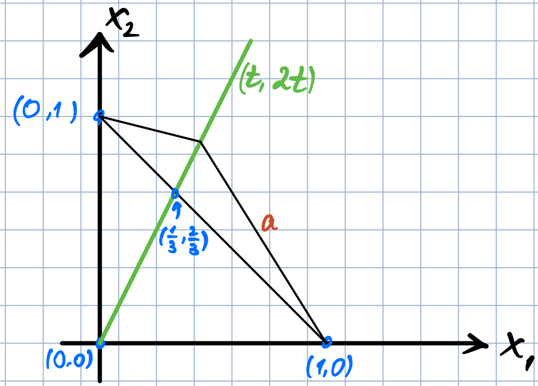
לכל i קודם צריך למקם את שחקן 2 באחד מ- $n+2-i$ המקומות האחרונים ⟸ $\binom{n+2-i}{1}$ אופציות.
לכל אופציה כזו יש $n!$ סידורים של שאר השחקנים

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n+1} \binom{n+2-i}{1} \cdot n! = n! \cdot \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n+1} (n+2-i) = n! \cdot \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1+1\right)}{2} = \frac{1}{2} n! \left(\frac{n^2}{4} + n \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} Sh_1(V) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \left(\frac{1}{2} n! \cdot \left(\frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} \right) + \frac{1}{2} n! \left(\frac{n^2}{4} + n \right) \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{4} + \frac{3n}{2} + \frac{n^2}{4} + n}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + \frac{5n}{2}}{4(n^2 + 3n + 2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$



נשתמש באיפיון הגיאומטרי: עבור $t\le\frac{1}{3}$ הנקודה $(t,2t)$ נמצאת בתוך התחום הקמור שנוצר מהנקודות $(0,0),(0,1),(1,0)$ ולכן קיבלנו תחום סימטרי עם $d_1=d_2=0$ $\Leftarrow$ $N(C,V)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

כעת נמצא מתי הנקודה $(t,2t)$ עובר ישר תומך: נשים לב כי עד $t=\frac{1}{2}$ לא נוכל להעביר ישר תומך ב-$(t,2t)$ (לא נוכל ליצור מסגרת ישר הניצ' $(t,2t)$ משולש שווה שוקיים ושהישר לגמרי מעל התחום)

$\Leftarrow$ עבור $\frac{1}{3}<t\le\frac{1}{2}$ הפתרון יתקבל על הישר a מעל הניצ' $x_1=\frac{1}{2}$ (כך שיווצר עם a משולש שווה שוקיים שכן קודקוד המשולש צריך להיות מעל מרכז המסגרת(. נקבל את הפתרון $N(C,V)=\left(\frac{1}{2},\frac{t}{1-t}\right)$

עבור $t>\frac{1}{2}$ הפתרון הוא $N(C,V)=(t,2t)$ כיוון שנוכל להעביר בה $(t,2t)$ ישר תומך שנמצא כולו מעל התחום ושיוצר משו"ש עם ציר x_1 כבסיס

$$\Downarrow$$

$$N(C,V)=\begin{cases}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & t\le\frac{1}{3}\\ (\frac{1}{2},\frac{t}{1-t}) & \frac{1}{3}<t\le\frac{1}{2}\\ (t,2t) & t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

3 שאלה זהה לשאלה 3 מועד א חורף תשע"ב, שם הוצג פתרון פשוט יותר.

א. למשל $x=(\frac{100}{11},\dots\frac{100}{11})$ נמצא בליבה:

יעילות: $\sum_{i=1}^{11}x_i=11\cdot\frac{100}{11}=100=(11-1)^2=V(N)$

רציונליות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם $1\in S$ אזי $V(S)=(|S|-1)^2\overset{?}{\le}\sum_{i\in S}x_i=\frac{100}{11}\cdot|S|$

$$(|S|-1)^2\le\frac{100}{11}\cdot|S|$$

$$|S|^2-2|S|+1-\frac{100}{11}\cdot|S|\le 0$$

$$|S|^2-\frac{122}{11}|S|+1\le 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{11}\le|S|\le 11$$

$$\Downarrow$$

$$V(S)\le\sum_{i\in S}x_i$$

אם $1\notin S$ $V(S)=0$ $\Leftarrow$ $\sum_{i\in S}x_i\ge V(S)$

$\Leftarrow$ מתקיימת רציונליות קואליציונית.

ב. התשלום המקסימלי ששחקן 2 יכול לקבל בווקטור בליבה הוא 19. נניח בשלילה כי קיים ומתקיים $x \in C(v,N)$ בו $x_2 = 19 + \varepsilon$ כאשר $\varepsilon > 0$.

אם כן, מיעילות x מתקיים $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N \setminus 2} x_i + x_2 = \sum_{i \in N \setminus 2} x_i + 19 + \varepsilon = 100$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \in N \setminus 2} x_i = 81 - \varepsilon$$

כעת נקבל עבור $S = N \setminus 2$: $V(S) = (10-1)^2 = 81$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \in N \setminus 2} x_i = 81 - \varepsilon < V(S) = 81$$

ולכן לא מתקיימת יציבות קואליציונית בסתירה לכך ש-x בליבה.

דוגמה לווקטור בו $x_2 = 19$: $(\frac{81}{10}, 19, \frac{81}{10}, \ldots \frac{81}{10})$

יעילות: $\sum_{i \in N} x_i = \frac{81}{10} \cdot 10 + 19 = 100 = V(N)$

יציבות קואליציונית: תהא $S \subseteq N$, אם $1 \in S$ וגם $2 \notin S$ $\sum_{i \in S} x_i = |S| \cdot \frac{81}{10} \overset{?}{\geq} (|S|-1)^2$

$$\frac{81}{10}|S| \geq |S|^2 - 2|S| + 1$$

$$|S|^2 - 2|S| - \frac{81}{10}|S| + 1 \leq 0$$

$$|S|^2 - \frac{101}{10}|S| + 1 \leq 0$$

$$\swarrow$$

$$\frac{1}{10} \leq |S| \leq 10$$

ומאחר ש-$2 \notin S$ התחום הנ"ל מתאים
ולכן מתקיימת יציבות קואליציונית אם $2 \notin S$.

אם $1 \in S$ וגם $2 \in S$

$$\sum_{i \in S} x_i = (|S|-1) \cdot \frac{81}{10} + 19 \overset{?}{\geq} (|S|-1)^2$$

$$\frac{81}{10}|S| - \frac{81}{10} + 19 \geq |S|^2 - 2|S| + 1$$

$$|S|^2 - \frac{101}{10}|S| - \frac{99}{10} \leq 0$$

$$-\frac{9}{10} \leq |S| \leq 11$$

$\Leftarrow$ מתקיימת יציבות קואליציונית

אם $1 \notin S$ מתקיימת באופן מיידי יציבות קואליציונית
כיוון ש-$V(S) = 0$.

ולכן בסה"כ $(\frac{81}{10}, 19, \frac{81}{10}, \ldots \frac{81}{10}) \in C(v,N)$ וקיבלנו $\max\{x_2 \mid x \in C(v,N)\} = 19$

ג. התשלום המינימלי ששחקן 1 יכול לקבל הוא 0, למשל $x=(0,10,10\dots10)\in C(v,N)$

<u>יעילות:</u> $\sum_{i\in N} x_i = 100 = v(N)$

<u>יציבות קואליציונית:</u> תהא $S\subseteq N$. <u>אם $1\in S$</u> נקבל $\sum_{i\in S} x_i = 10\cdot|S| \overset{?}{\geq} (|S|-1)^2$

$$10|S| \geq |S|^2-2|S|+1$$

$$|S|^2-12|S|+1\leq 0$$

$$0.08\leq |S| \leq 11.9$$

ולכן מתקיימת יציבות קואליציונית

<u>אם $1\notin S$</u> אז $v(S)=0$ ומתקיימת יציבות קואליציונית

$\Leftarrow x\in C(v,N)$ ולכן $\min\{x_1 \mid x\in C(v,N)\}=0$

*נציין כי לא יכול להיות x_1 קטן מ-0 כיוון ש- $v(1)=0$ ואז לא הייתה מתקיימת יציבות קואליציונית