① לא בחומר

②

$$M_+ = \{ m\in M \mid \mu(m) > \lambda(m) \}$$

$$W_- = \{ w\in W \mid \mu(w) < \lambda(w) \}$$

נניח בשלילה כי קיים $m\in M_+$ שעבורו $w=\mu(m)\notin W_-$ $\Leftarrow$ $m=\mu(w) \geq_w \lambda(w)$.

אם כך $w=\mu(m) >_m \lambda(m)$ (m מעדיף את w על פני מה שזוגתו ב-λ, וגם w מעדיפה את m על פני מי שזוגה ב-λ) ולכן קיבלנו (m,w) זוג חוסם ב-λ בסתירה לכך ש-λ שידוך יציב.

③

בחישוב ערך שפלי של שחקן 1 ישארו בסכימה רק סדרים שבהם שחקן 1 שחקן מפתח. נסמנם ב- R_i^1 (שחקן 1 נמצא במקום ה-i וגם שחקן מפתח) $\Leftarrow$ $V(P_{R_i^1})=0$ & $V(P_{R_i^1}\cup 1)=1$.

$$\frac{i-1}{m}+\frac{1}{3} \geq \frac{1}{2} \quad \& \quad \frac{i-1}{m} < \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$i \geq \frac{m}{6}+1 \qquad\qquad i < \frac{m}{2}+1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m}{6}+1 \leq i < \frac{m}{2}+1$$

יש סה"כ $\frac{m}{2}+1-(\frac{m}{6}+1)=\frac{m}{3}$ אפשרויות ל-i ולכל אפשרות של i יש $m!$ סידורים של שאר השחקנים

$$\Downarrow$$

$\frac{m}{3}\cdot m!$ אפשרויות סה"כ

$$\varphi_1(V) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{R_i^1\in \Pi_R} R_i^1 = \frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{m}{3}\cdot m! = \frac{m}{3(m+1)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

4

נתון (N,V) משחק שיתופי עם ליבה לא ריקה $\Leftarrow$ קיים $x\in C(N,V)$. נתון i,j שחקנים סימטריים

אם $x_i=x_j$ סיימנו. אחרת, נניח בה"כ כי $x_i<x_j$.

נגדיר x' כך ש: $x'_k=\begin{cases} \frac{x_i+x_j}{2} & k=i,j \\ x_k & else \end{cases}$ ונקבל:

יעילות:
$$\sum_{k\in N} x'_k = \sum_{k\ne i,j} x'_k + x'_i + x'_j = \sum_{k\ne i,j} x_k + \frac{x_i+x_j}{2} + \frac{x_i+x_j}{2} = \sum_{k\in N} x_k \overset{\text{יעילות של } x}{=} V(N)$$

יציבות קואליציונית: תהא $S\subseteq N$, אם כך:

אם $i,j\notin S$ אז
$$V(S) \overset{\text{יציבות קואליציונית של } x}{\le} \sum_{k\in S} x_k = \sum_{k\in S} x'_k$$

אם $i\in S$ וגם $j\notin S$ אז
$$V(S) \overset{\text{יציבות קואליציונית של } x}{\le} \sum_{k\in S} x_k = \sum_{\substack{k\in S\\ k\ne i}} x_k + x_i \overset{x_i<x_j}{=} \sum_{\substack{k\in S\\ k\ne i}} x_k + \frac{x_i+x_j}{2}$$

אם $j\in S$ וגם $i\notin S$ אז
$$V(S\setminus j\cup j) = V(S\setminus j\cup i) \le \sum_{\underbrace{k\in(S\setminus j)\cup i}_{\text{קואליציה בלי } j \text{ ועם } i \text{ שראינו שמקיימת יציבות קואליציונית}}} x'_k = \sum_{k\in S\setminus j} x'_k + \underbrace{\frac{x_i+x_j}{2}}_{x'_i} = \sum_{k\in S\setminus j} x'_k + \underbrace{x'_j}_{x'_i=x'_j} = \sum_{k\in S} x'_k$$

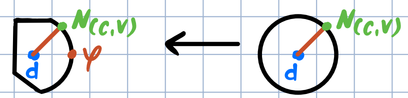
אם $j,i\in S$ אז
$$V(S) \le \sum_{k\in S} x_k = \sum_{\substack{k\in S\\ k\ne i,j}} x_k + x_i + x_j = \sum_{\substack{k\in S\\ k\ne i,j}} x'_k + \underbrace{\frac{x_i+x_j}{2}}_{x'_i} + \underbrace{\frac{x_i+x_j}{2}}_{x'_j} = \sum_{k\in S} x'_k$$

לכן קיבלנו $x'\in C(N,V)$ ומתקיים $x'_i=x'_j$.

סימטריה - מתקיימת. אם הבעיה סימטרית, הפתרון מוגדר להיות פתרון נש שידוע מההרצאה כי מקיים סימטריה.

אי תלות - לא מתקיימת (ניתן להוריד חלקים מהתחום שיהפכו את הבעיה לבעיה שלא ניתן להפוך לבעיה סימטרית ואז הפתרון משתנה).

למשל



לינאריות - מתקיימת, תהא (C,d) בעיית מיקוח. אם היא יכולה להתקבל מבעיה סימטרית אז הפתרון הוא פתרון נש שמקיים לינאריות.
אם הבעיה לא מתקבלת מבעיה סימטרית הפתרון הוא $\varphi=\underset{x_1}{\operatorname{argmax}}\{x\in C \mid x_1\geq d\}$
ולאחר טרנספורמציה לינארית נקבל

$$\varphi'=\underset{y_1}{\operatorname{argmax}}\{(y_1,y_2)\mid y\in C'\}=\underset{ax_1+b}{\operatorname{argmax}}\{(ax_1+b,ax_2+b)\mid x\in C\}=\underset{ax_1+b}{\operatorname{argmax}}\{x_1\mid x\in C\}=a\cdot\varphi+b$$

יעילות - מתקיימת. אם הבעיה יכולה להתקבל מבעיה סימטרית אז הפתרון הוא פתרון נש ולכן מקיים יעילות.

אם הבעיה לא מתקבלת מבעיה סימטרית אז הפתרון הוא $\varphi=\underset{x_1}{\operatorname{argmax}}\{x\in C \mid x_1\geq d\}$ וזו נקודה על השפה הפרטו-יעילה (אם יש 2 נקודות עם אותו x_1 מקסימלי שניהם פתרוניות ומפרט זה עם x_2 הגדול יותר כך שאין נקודה לא שולטת על הפתרון המתקבל).