

Projet d'Ingénierie **Mathématique**

Groupe n°9

**Refroidissement d'un moteur par
film fluide**

Tuteur: Mr Franck Nicoud

Daumas - Ilona

Malen - Simon

Pereira de Pinho - Mathis

Remerciements :

Nous tenons à remercier Mr Franck Nicoud, professeur à Polytech Montpellier, d'avoir été notre tuteur au cours de ce projet, contribuant à la bonne compréhension et réalisation de ce dernier.

Nous tenons également à remercier Polytech Montpellier de nous avoir permis de réaliser notre projet dans les meilleures conditions.

Résumé :

Ce projet étudie l'évolution de la température d'un film fluide autour d'un moteur.

Dans un premier temps, certaines hypothèses ont été réalisées afin que l'étude se porte sur un film fluide dans le plan. La première étude a été réalisée pour un film fluide dont la vitesse est constante. Après l'obtention de résultats cohérents de nouvelles études ont été menées afin de se rapprocher au mieux de la réalité.

La seconde partie du projet consiste à changer certains paramètres. Tout d'abord, le profil de vitesse a été changé pour devenir linéaire (écoulement de Couette). Ensuite, les fluctuations de certains paramètres physico-chimiques du fluide, dépendant de la température, ont été pris en compte. Après cette étude, la validité d'une des conditions limites critiquables a été vérifiée.

Dans un dernier temps il a fallu justifier de l'intérêt d'utiliser un film d'huile en le comparant avec d'autres fluides.

Abstract :

This study is about evolution of the temperature field inside a fluid film around an engine. In the first part, few hypothesis have been chosen in order to simplify the problem. The first study has been realized at constant speed. When the results were consistent, new studies have been led to bring the model closer to reality.

The second part of the project was about studying the temperature in the fluid film but changing some parameters. First the speed has been changed to have a linear velocity profile (Couette flow). Furthermore the fluctuations of some of the fluid's temperature dependent physico-chemical characteristics has been taken into consideration. Then the validity of one questionable boundary condition has been verified.

In the last part, a study about why the oil is the the best fit for the fluid has been done. For this study, a comparison between the oil and some other fluid (air and water) have been realized.

Table des Matières

I Introduction	3
II Modélisation	4
II.1 Trouver l'équation différentielle	4
II.2 Conditions aux limites	5
II.3 Schema	5
III Analytique	6
III.1 Résolution	6
III.1.1 Relèvement	6
III.1.2 Résolution	6
III.2 Type d'huile	9
III.3 Implémentation sur MatLab	9
IV Numérique	10
IV.1 Schéma utilisé	10
IV.2 Résultats	11
IV.3 Comparaison avec l'analytique	11
V Amélioration du modèle	14
V.1 Changement du profil de vitesse	14
V.2 Impact de la température sur les caractéristiques du fluide	15
V.3 Vérification de la validité de la condition limite en $y = e$	17
V.4 Dimensionnement: Fluide et débit	18
VI Conclusion	20
VII Annexe & Bibliographie	21
VII.1 Annexe	21
VII.2 Bibliographie	22

Liste des Figures

1 Schema du système global	3
2 Schema d'une fraction du film	5
3 Évolution de la température dans le fluide avec la résolution analytique pour un débit de 0,07 cL/s	10
4 Evolution de la température dans le fluide avec la résolution numérique pour un débit de 0,07 cL/s	11
5 Température à la sortie du fluide en fonction de l'épaisseur du fluide	12
6 Température du fluide à la surface du moteur en fonction de la longueur du fluide	13
7 Température maximum dans le film en fonction du débit	15
8 Film sans variation des caractéristiques de l'huile en fonction de T	16
9 Film avec variation de λ et c_v de l'huile en fonction de T	16
10 Film avec variation de λ , c_v et μ de l'huile en fonction de T	16
11 Stabilité de la variation de T en fonction de la variation de λ et C_v	17
12 Couche Limite a 1% pour un débit faible	18
13 Couche Limite a 1% pour un haut débit	18
14 Température en fonction du débit pour l'huile et l'eau	18
15 Température en fonction du débit pour de l'air	18
16 Température en fonction du débit pour une huile	19

I Introduction

Lorsque un moteur est allumé, il a tendance à s'échauffer, ce qui peut provoquer une casse de ce dernier. Il est donc important d'arriver à contrôler sa température. Ce contrôle peut s'effectuer par le biais d'un film fluide.

Ce projet vise à étudier l'évolution de température en chaque point de ce film fluide en contact avec la paroi du moteur. Un film fluide est une fine épaisseur de fluide capable de capter le flux de chaleur dégagé par le moteur et de la dissiper par conduction et convection. Ainsi le moteur reste à une température acceptable, permettant à celui-ci de fonctionner de manière optimal. Les différents paramètres du film fluide influent directement sur la santé et le fonctionnement du moteur, il est donc crucial de les choisir correctement.

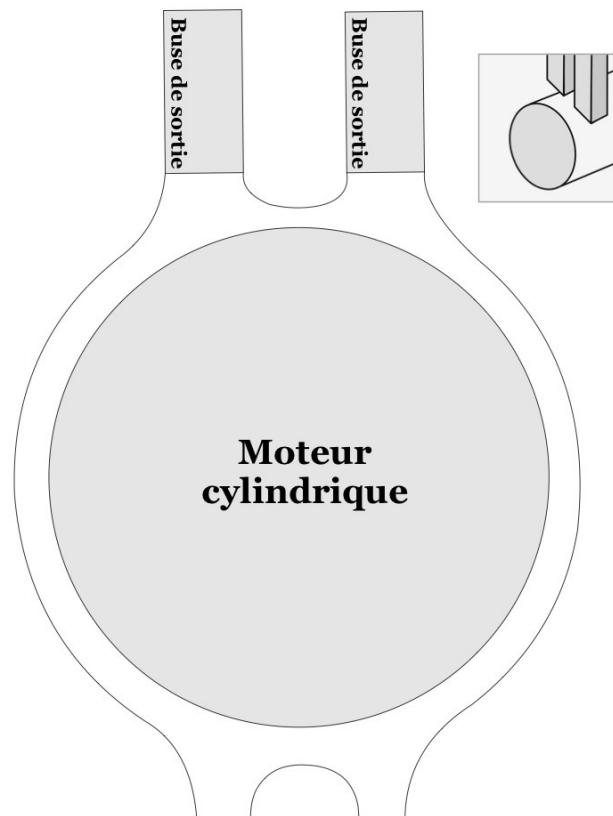


Figure 1: Schema du système global

Constante	signification	unité
T	Température	K
e	Épaisseur	m
L	Longueur	m
u_0	Vitesse maximale	$m.s^{-1}$
λ	Conductance thermique	$J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
c_v	Capacité calorifique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
q_0	Flux de chaleur	$J.s^{-1}$
q	Terme source de chaleur volumique	$J.s^{-1}.m^{-3}$
Q	Débit	$L.s^{-1}$
p	Pression	Pa

II Modélisation

Le film fluide de refroidissement est en réalité autour d'un moteur cylindrique. Cette modélisation étant complexe à réaliser, il est nécessaire de simplifier le problème avec plusieurs hypothèses.

Hypothèses :

- On se place dans le plan de la buse
- Le fluide est newtonien incompressible
- L'écoulement est laminaire et permanent
- L'épaisseur du fluide est constante et petite devant la longueur.

II.1 Trouver l'équation différentielle

L'équation permettant de définir le problème est l'équation de conservation de l'énergie interne du système Navier-Stokes [II].

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) - p \text{div} \overrightarrow{u} + \phi_v + q \quad (\text{II.1})$$

Avec:

$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ le Laplacien de la température

$\text{div} \overrightarrow{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ la divergence du champs de vitesse

$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{u}$ la dérivée particulaire de la température

$\phi_v = \overline{\overline{\sigma_v}} : \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{u}$ un terme source de chaleur lié aux contraintes créées par viscosité du fluide

Des hypothèses permettent de simplifier l'équation (II.1) :

- le fluide étant incompressible $\text{div} \overrightarrow{u} = 0$.
- λ est considéré constant dans un premier temps d'où $\text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) = \Delta T$.
- l'écoulement étant permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc $\frac{DT}{Dt} = \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{u}$.
- ϕ_v est négligé car les valeur du tenseur des contraintes sont très petites pour des vitesses restant faibles.
- la source de chaleur due au rayonnement est considérée négligeable d'où $q = 0$.
- dans le plan le laplacien de T peut être simplifié: $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Dans un premier temps le profil de vitesse utilisé est un profil de vitesse constant de telle sorte que:

$$\overrightarrow{u}(x, y) = u_0 \overrightarrow{x}$$

De plus, sachant $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{u} = u_0 \frac{\partial T}{\partial x}$

L'équation finale obtenue est la suivante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II.2})$$

avec

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

II.2 Conditions aux limites

Il est maintenant nécessaire de trouver des conditions limites cohérentes avec le modèle.

- Une température constante et égale à la température extérieure à l'entrée et à la surface du film.

$$T(0, y) = T_{ext} \quad (\text{II.3})$$

$$T(x, e) = T_{ext} \quad (\text{II.4})$$

- Une variation nulle de la température dans la direction de $\vec{x}$ en sortie du fluide

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L, y) = 0 \quad (\text{II.5})$$

- Un flux de température venant du moteur

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = \frac{q_0}{\lambda} \quad (\text{II.6})$$

II.3 Schema

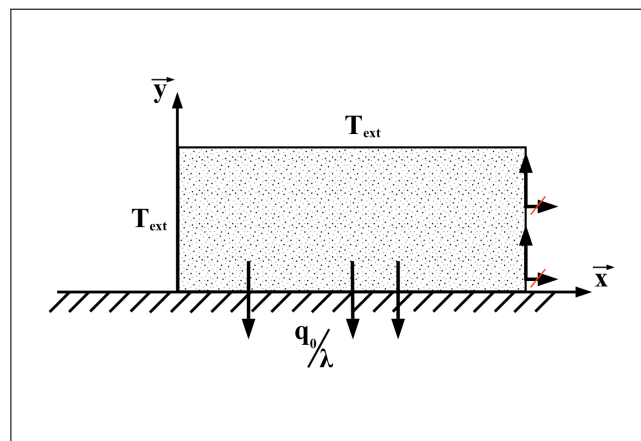


Figure 2: Schema d'une fraction du film

III Analytique

III.1 Résolution

Une fois le modèle conceptualisé il faut résoudre l'équation différentielle (II.2) afin d'obtenir le champs de température du fluide.

III.1.1 Relèvement

Les conditions limites n'étant pas homogènes, il faut donc les homogénéiser. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer un relèvement. Il a été décidé de faire ce relèvement suivant la variable y , imposant d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\bar{T}(x, y) = T(x, y) + f(y)$$

Avec $f(y)$ une fonction dépendant seulement de y qui respecte les conditions limites (II.4) et (II.6).

CL (II.4):

$$\bar{T}(x, e) = 0 \iff T(x, e) + f(e) = 0 \iff T_{ext} + f(e) = 0 \iff f(e) = -T_{ext} \quad (\text{III.1})$$

CL (II.6):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}(x, 0) = 0 \iff \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) + f'(0) = 0 \iff \frac{q_0}{\lambda} + f'(0) = 0 \iff f'(0) = -\frac{q_0}{\lambda} \quad (\text{III.2})$$

(III.2) donne:

$$f(y) = -\frac{q_0}{\lambda}y + C$$

L'équation (III.1) permet de connaître $C = \frac{q_0 e}{\lambda} - T_{ext}$, ce qui donne alors:

$$f(y) = -\frac{q_0}{\lambda}y + \frac{q_0}{\lambda}e - T_{ext} \quad (\text{III.3})$$

$\bar{T}(x, y)$ étant une fonction annexe de T , de nouvelles conditions limites, cette fois-ci homogènes, s'appliquent à cette fonction:

$$\bar{T}(0, y) = T(0, y) + f(y) = \frac{q_0}{\lambda}(e - y) \quad (\text{III.4})$$

$$\bar{T}(x, e) = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(L, y) = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (\text{III.7})$$

III.1.2 Résolution

En utilisant une méthode de séparation des variables, $\bar{T}$ peut se réécrire de la manière suivante:

$$\bar{T} = \bar{T}_x(x) \bar{T}_y(y)$$

L'équation (II.2) donne alors:

$$\bar{T}_x'' \bar{T}_y + \bar{T}_x \bar{T}_y'' = \frac{u_0}{a} \bar{T}_x' \bar{T}_y'$$

En divisant cette équation par $\overline{T}_x \overline{T}_y$:

$$\frac{\overline{T}_x''}{\overline{T}_x} + \frac{\overline{T}_y''}{\overline{T}_y} - \frac{u_0}{a} \frac{\overline{T}_x'}{\overline{T}_x} = 0$$

$$\iff \frac{\overline{T}_y''}{\overline{T}_y} = \frac{u_0}{a} \frac{\overline{T}_x'}{\overline{T}_x} - \frac{\overline{T}_x''}{\overline{T}_x} = c$$

Où c est une constante.

En découle une première équation, dépendant seulement de y :

$$\overline{T}_y'' + c \overline{T}_y = 0 \quad (\text{III.8})$$

Trois cas se distinguent alors: $c = 0$, $c < 0$ et $c > 0$.

Pour traiter ces cas, la méthode spectrale est utilisée. Le détail des calculs est fourni en annexe.

Pour un k donné, le résultat est le suivant:

$$\overline{T}_y^k(y) = A_k \cos(\alpha_k y)$$

Or $\overline{T}$ dépend aussi de la variable x . Le respect de la méthode de séparation des variables impose que pour un k donné, A_k dépend de x , d'où le résultat suivant :

$$\overline{T}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \cos(\alpha_k y)$$

Il faut ensuite déterminer les $A_k(x)$.

L'expression de $\overline{T}$ est insérée dans l'équation (II.2), permettant d'obtenir l'équation suivante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k''(x) - \alpha_k^2 A_k(x) - \frac{u_0}{a} A_k'(x)) \cos(\alpha_k y) = 0$$

Cette expression est ensuite multipliée par $\cos(\alpha_i y)$ et en utilisant l'orthogonalité du sinus une nouvelle équation différentielle est obtenue, permettant de déterminer les $A_k(x)$.

Pour un k donné, l'équation est la suivante:

$$A_k''(x) - \frac{u_0}{a} A_k'(x) - \alpha_k^2 A_k(x) = 0$$

Il faut commencer par calculer le déterminant:

$$\Delta = \left(\frac{u_0}{a}\right)^2 + 4\alpha_k^2 > 0$$

Deux racines réelles sont obtenues:

$$r_{1k} = \frac{u_0}{2a} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_0}{a}\right)^2 + 4\alpha_k^2}$$

et

$$r_{2k} = \frac{u_0}{2a} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_0}{a}\right)^2 + 4\alpha_k^2}$$

donc:

$$A_k(x) = \mu e^{r_{1k}x} + \eta e^{r_{2k}x}$$

D'où

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu e^{r_{1k}x} + \eta e^{r_{2k}x}) \cos(\alpha_k y)$$

Il faut maintenant déterminer les expressions des constantes μ et η . Pour cela, il faut utiliser les conditions limites (III.6) et (III.4).

(III.6) donne:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(L, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu r_{1k} e^{r_{1k}L} + \eta r_{2k} e^{r_{2k}L}) \cos(\alpha_k y) = 0 \quad (\text{III.9})$$

(III.4) donne:

$$\bar{T}(0, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu + \eta) \cos(\alpha_k y) = \frac{q_0}{\lambda} (e - y) \quad (\text{III.10})$$

L'orthogonalité du cosinus est utilisée dans l'équation (III.9) et donne:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu r_{1k} e^{r_{1k}L} + \eta r_{2k} e^{r_{2k}L}) \int_0^e \cos(\alpha_k y) \cos(\alpha_i y) dy &= 0 \\ \iff \mu r_{1k} e^{r_{1k}L} + \eta r_{2k} e^{r_{2k}L} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu + \eta) \int_0^e \cos(\alpha_k y) \cos(\alpha_i y) dy &= \int_0^e \frac{q_0}{\lambda} (e - y) \cos(\alpha_i y) dy \\ \iff (\mu + \eta) \frac{e}{2} &= \int_0^e \frac{q_0 e}{\lambda} \cos(\alpha_i y) dy - \int_0^e \frac{q_0 y}{\lambda} \cos(\alpha_i y) dy \\ \iff (\mu + \eta) \frac{e}{2} &= \frac{q_0 e}{\lambda} \left[\frac{\sin(\alpha_i y)}{\alpha_i} \right]_0^e - \int_0^e \frac{q_0 y}{\lambda} \cos(\alpha_i y) dy \end{aligned}$$

En réalisant une intégration par partie, il est obtenu:

$$\begin{aligned} \mu + \eta &= -\frac{2q_0}{e\lambda\alpha_i^2} (\cos(\alpha_i e) - 1) = \frac{2q_0}{e\lambda\alpha_i^2} \\ \iff \mu &= \frac{2q_0}{e\lambda\alpha_i^2} - \eta \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

En injectant (III.12) dans (III.11), il est obtenu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2q_0}{e\lambda\alpha_i^2} - \eta \right) r_{1k} e^{r_{1k}L} + \eta r_{2k} e^{r_{2k}L} &= 0 \\ \iff \eta (r_{1k} e^{r_{1k}L} - r_{2k} e^{r_{2k}L}) &= \frac{2q_0 r_{1k} e^{r_{1k}L}}{e\lambda\alpha_i^2} \\ \iff \eta &= \frac{2q_0 r_{1k} e^{r_{1k}L}}{e\lambda\alpha_k^2 (r_{1k} e^{r_{1k}L} - r_{2k} e^{r_{2k}L})} \end{aligned}$$

Donc (III.12) donne:

$$\mu = -\frac{2q_0 r_{2k} e^{r_{2k}L}}{e\lambda\alpha_k^2 (r_{1k} e^{r_{1k}L} - r_{2k} e^{r_{2k}L})}$$

L'expression de la température dans le fluide vaut alors:

$$T(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu e^{r_{1k}x} + \eta e^{r_{2k}x}) \cos(\alpha_k y) + \frac{q_0}{\lambda} y - \frac{q_0 e}{\lambda} + T_{ext}$$

Avec :

- la valeur propre:

$$\alpha_k = \frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

- les racines:

$$r_{1k} = \frac{u_0}{2a} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_0}{a}\right)^2 + 4\alpha_k^2}$$

$$r_{2k} = \frac{u_0}{2a} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_0}{a}\right)^2 + 4\alpha_k^2}$$

- les constantes:

$$\mu = -\frac{2q_0 r_{2k} e^{r_{2k} L}}{e \lambda \alpha_k^2 (r_{1k} e^{r_{1k} L} - r_{2k} e^{r_{2k} L})}$$

$$\eta = \frac{2q_0 r_{1k} e^{r_{1k} L}}{e \lambda \alpha_k^2 (r_{1k} e^{r_{1k} L} - r_{2k} e^{r_{2k} L})}$$

III.2 Type d'huile

Pour cette étude nous avons choisi un type d'huile dont les propriétés sont en adéquation avec le modèle. Nous avons choisi une huile du 5W40 qui possèdent une température d'utilisation adapté à notre modèle.

III.3 Implémentation sur MatLab

Un script Matlab est alors écrit donnant le gradient de température dans une portion élémentaire de fluide.

L'expression faisant intervenir des exponentielles trop grandes pour que Matlab puissent faire les calculs, il faut donc réécrire l'expression afin de la simplifier.

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2q_0 r_{2k} e^{r_{2k} L} e^{r_{1k} x} + 2q_0 r_{1k} e^{r_{1k} L} e^{r_{2k} x}}{e \lambda \alpha_k^2 (r_{1k} e^{r_{1k} L} - r_{2k} e^{r_{2k} L})} \cos(\alpha_k y)$$

La simplification par $e^{\frac{u_0 L}{2a}} e^{\frac{\sqrt{\Delta} L}{2}}$ est réalisée, permettant d'obtenir le résultat suivant :

$$\bar{T}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2q_0}{e \lambda \alpha_k^2} \frac{r_{1k} e^{r_{2k} x} - r_{2k} e^{r_{1k} x - \sqrt{\Delta} L}}{r_{1k} - r_{2k} e^{-\sqrt{\Delta} L}} \cos(\alpha_k y)$$

Pour tracer la température il faut d'abord trouver les valeurs des constantes. En faisant quelques recherches [2], les valeurs ci-dessous sont obtenues:

$$e = 0.001 \text{ m} \quad L = 0.1 \text{ m} \quad T_{ext} = 293 \text{ K} \quad \lambda = 0.13 \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$c_v = 2000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \rho = 855 \text{ kg.m}^{-3} \quad q_0 = -1000 \text{ J.s}^{-1}$$

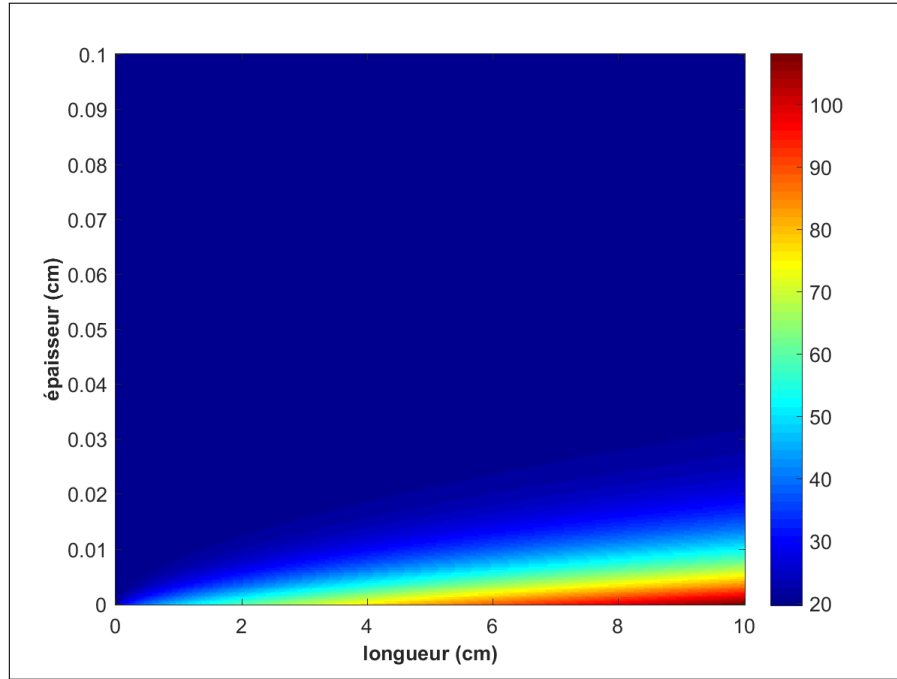


Figure 3: Évolution de la température dans le fluide avec la résolution analytique pour un débit de 0,07 cL/s

La figure 3 permet de modéliser l'évolution de la température dans le fluide. Le résultat obtenu semble cohérent. En effet, les conditions limites semblent respectées. La particule de fluide la plus chaude est celle située en sortie du fluide en contact avec la surface du moteur.

IV Numérique

IV.1 Schéma utilisé

Pour étudier ce système, un schéma 2Δ pour les dérivées secondes et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée première sont utilisés [3]. L'équation suivante est alors obtenue:

$$\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}}{\Delta y^2} - \frac{u_0}{a} \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0$$

Cette méthode nécessite de créer un maillage suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Une fois celui-ci créé, il faut caractériser la température en chacun de ses points. Cela revient à résoudre une équation à chacun des points du maillage, où l'inconnu est la température à cette position précise. Il y aura donc autant d'équation que de point de maillage. Ce système peut être écrit de la façon suivante : $AT = B$ où A et B sont respectivement une matrice carré et une matrice colonne dont chacun des termes est connu. Ces deux matrices ont été construites de manière empirique en résolvant le système avec un nombre de maille très faible. Le déroulé de cette résolution est en annexe.

Test une matrice colonne contenant les inconnus de température en chacun des points du maillage. Il faut trouver la matrice T . Pour cela, les deux côtés de l'équation ont été multipliées par l'inverse de la matrice A . L'équation suivante est obtenu : $T = A^{-1}B$. Connaissant maintenant la température en chacun des points du maillage, il faut reconstruire la matrice T de sorte qu'elle ne soit plus une matrice colonne mais une matrice représentative de la géométrie du système. Si un nombre de maille suffisamment grand est pris, il est possible de supposer que la résolution est continu suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

IV.2 Résultats

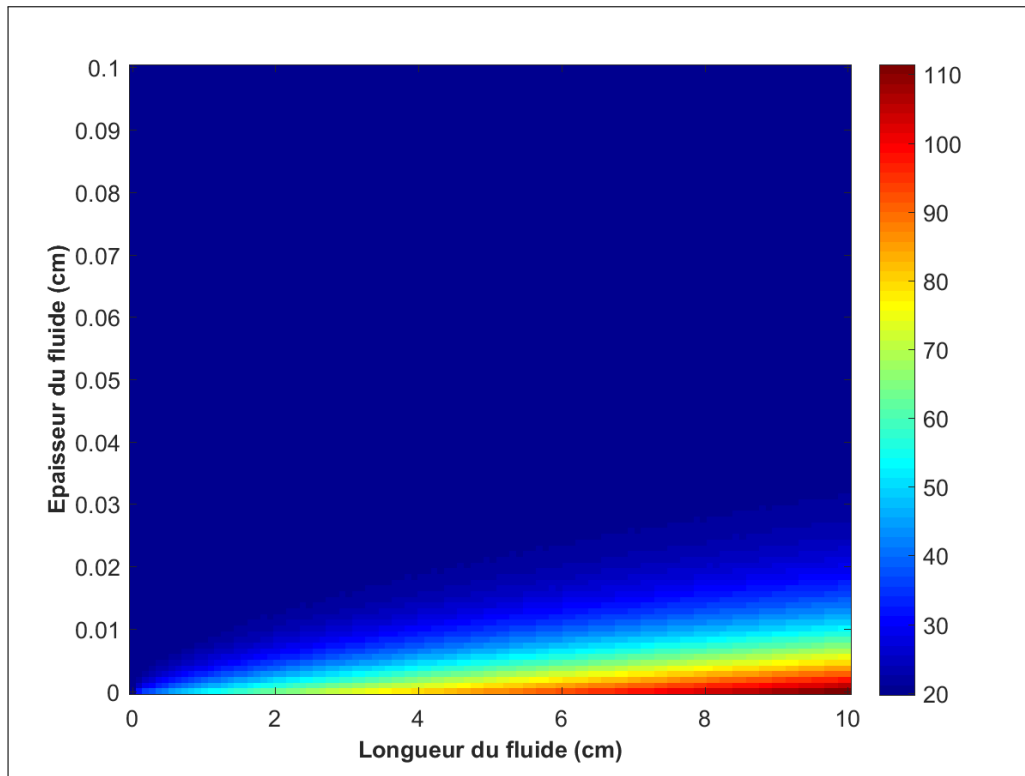


Figure 4: Évolution de la température dans le fluide avec la résolution numérique pour un débit de 0,07 cL/s

La figure 4 permet de modéliser l'évolution de la température dans le fluide. Le résultat semble cohérent et semble correspondre au résultat trouvé dans la partie analytique. Il est donc temps de comparer les deux résultats plus en profondeur.

IV.3 Comparaison avec l'analytique

Il faut maintenant mettre en opposition les résultats obtenus dans la modélisation analytique et ceux de la modélisation numérique afin de vérifier que le modèle numérique est valable. Les mêmes constantes ont été prises pour les deux modélisations afin de pouvoir les comparer.

Après comparaison des résultats, un même profil est observé dans les deux cas, faisant apparaître la température la plus élevée à la sortie du fluide, au niveau du moteur.

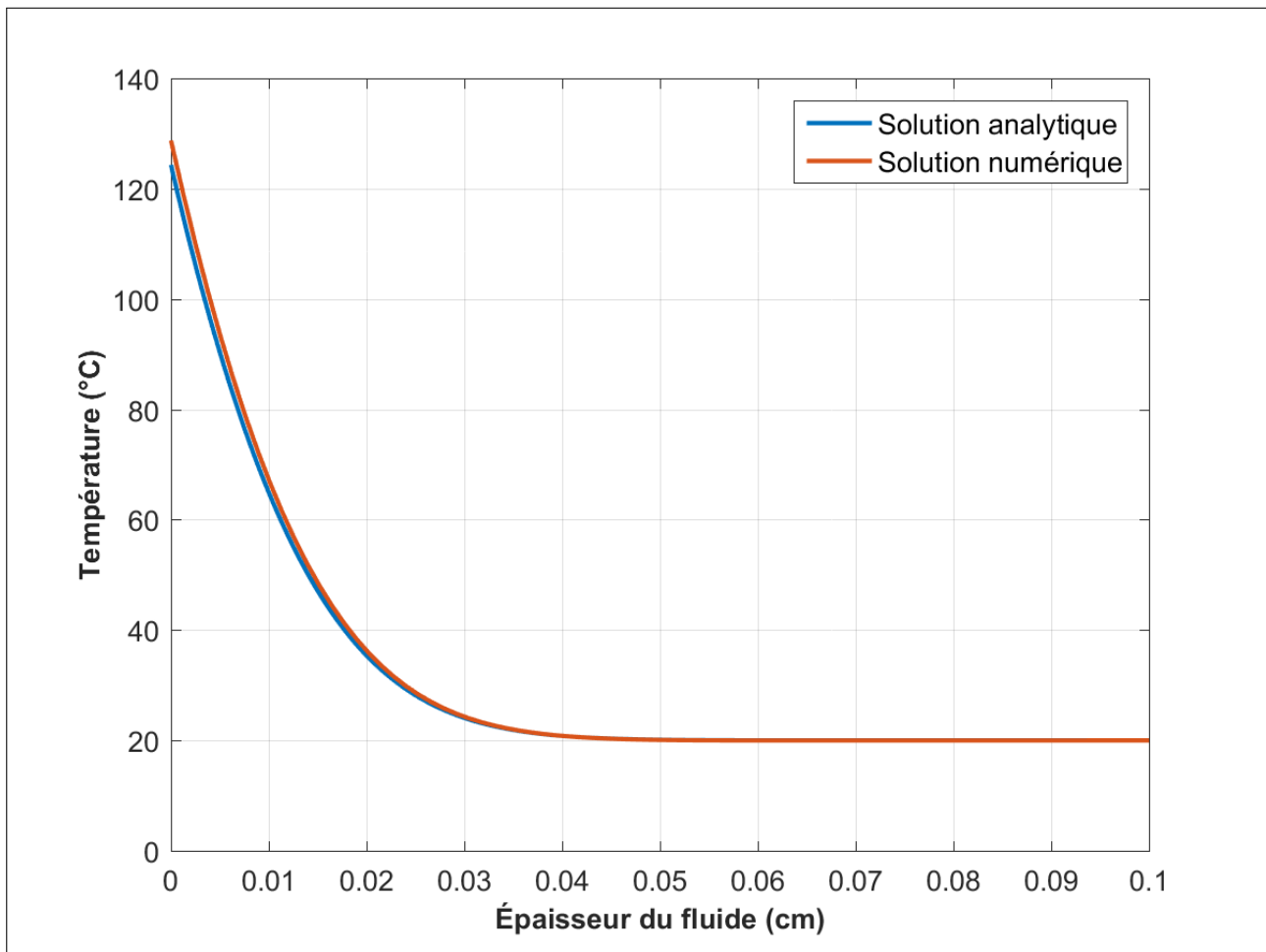


Figure 5: Température à la sortie du fluide en fonction de l'épaisseur du fluide

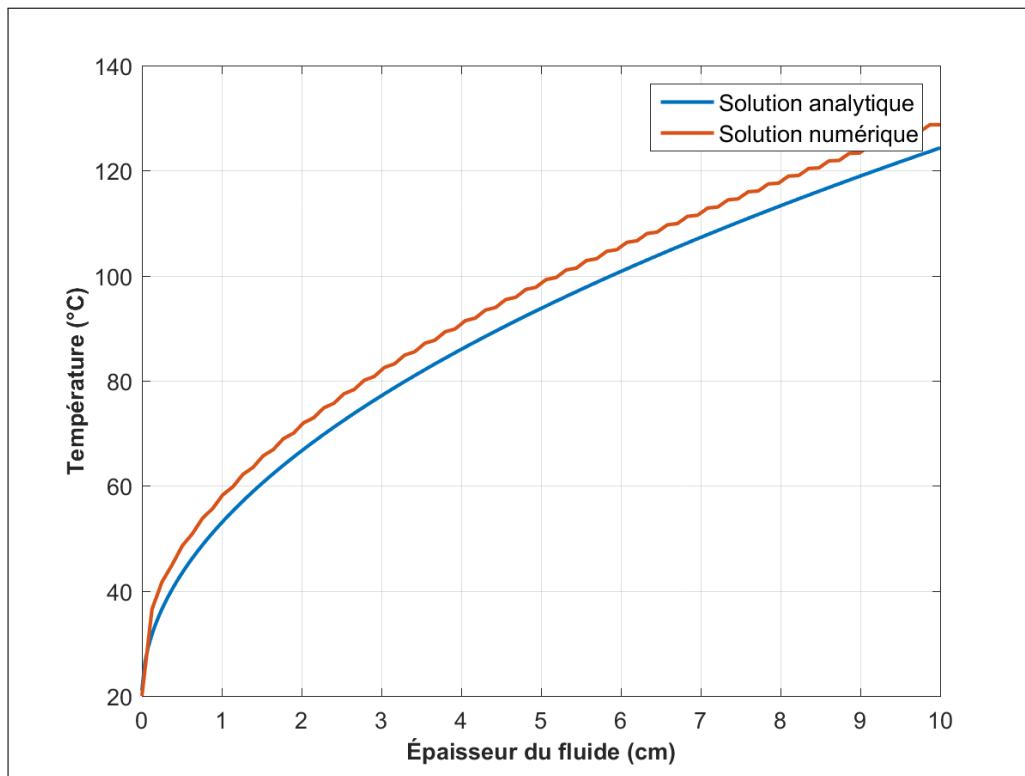


Figure 6: Température du fluide à la surface du moteur en fonction de la longueur du fluide

La figure 5 montre l'évolution de température à la sortie du fluide, c'est-à-dire en $x = L$, pour la résolution analytique et numérique. Une petite différence entre les deux résolutions est observée proche du moteur mais cet écart diminue et disparaît en montant.

La figure 6 montre l'évolution de la température du fluide à la surface du moteur, c'est-à-dire en $y = 0$, pour la résolution analytique et numérique. Une différence de température de quelques degrés est observée le long du moteur, mais elle reste assez faible, n'impactant pas la validité du modèle.

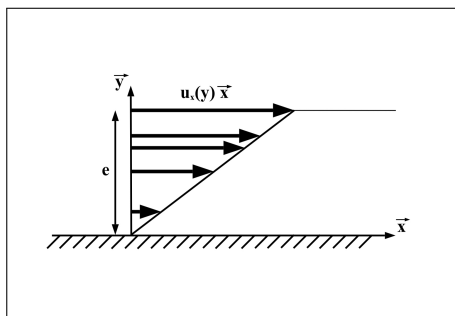
Il est alors possible de conclure que le modèle numérique est valable. Il est donc temps de complexifier le modèle afin de s'approcher de la réalité physique.

V Amélioration du modèle

Dans cette partie, la température va être étudiée en fonction du débit Q . Pour le calcul du débit, il est nécessaire de connaître la section du film fluide car $Q = uS$ où u est la vitesse et S la section du film. Pour cela, il a été décidé que la section du fluide soit carré, de côté e .

V.1 Changement du profil de vitesse

Jusqu'ici un profil de vitesse constant sur toute l'épaisseur du film fluide a été utilisé, cependant il ne prend pas en compte certaines caractéristiques du fluide comme sa viscosité. Pour la suite de l'étude, une comparaison entre l'impact d'un profil de vitesse constant et celui d'un profil d'écoulement de Couette, indépendant de x , va être réalisée.



L'équation de conservation de la quantité de mouvement du système de Navier-Stokes donne:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \frac{1}{3}\mu \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{u})) + \mu \vec{\Delta}\vec{u} + \rho \vec{g}$$

Avec les hypothèses choisies pour cette étude cette équation donne:

$$\rho \overrightarrow{\text{grad}}\vec{u} \cdot \vec{u} = -\vec{\nabla}P + \mu \vec{\Delta}\vec{u}$$

De plus $\overrightarrow{\text{grad}}\vec{u} \cdot \vec{u}$ est nul. En projection on obtient:

$$\begin{cases} \text{suivant } \vec{x}: & -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \\ \text{suivant } \vec{y}: & -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \implies P = P(x) \end{cases}$$

Il vient donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = c^{te} \\ \implies \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y + A \\ \implies u_x &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y^2 + Ay + B \end{aligned}$$

OR: $u(y=0) = 0$ & $u(y=e) = U_0$

Ce qui donne: $B = 0$ & $A = \frac{U_0}{e} - \frac{e}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$

$$\vec{u}(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + y \left(\frac{U_0}{e} - \frac{e}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

Un vecteur contenant la vitesse du fluide pour chaque valeurs de y a été créé et une modification de la matrice A a été réalisée pour inclure le nouveau profil de vitesse.

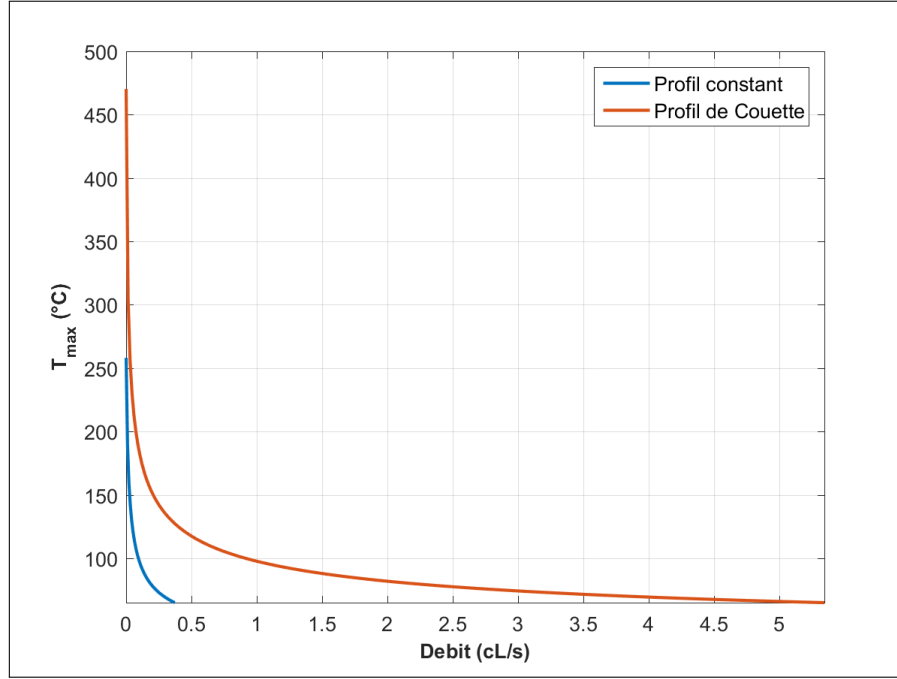


Figure 7: Température maximum dans le film en fonction du débit

Ce graphique met en évidence que pour un profil de Couette, il faut un débit beaucoup plus important que pour un profil constant pour atteindre une température maximale acceptable. La viscosité est donc **non négligeable**. Pour la suite de l'étude toutes les modélisations seront faites en prenant en compte un profil de vitesse de Couette.

V.2 Impact de la température sur les caractéristiques du fluide

Les caractéristiques du fluide, notamment sa viscosité, sa conductivité et sa capacité thermique sont cependant dépendantes de la température. Il faut donc prendre en compte cette dépendance pour l'étude du système. L'équation (II.2) trouvée précédemment n'est donc plus valable car λ devient variable. L'équation différentielle va donc changer:

$$\begin{aligned}
 \rho c_v \frac{DT}{Dt} + \text{div}(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \rho c_v \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{u} + \text{div}(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \rho c_v \frac{u_0}{e} y \frac{\partial T}{\partial x} + \text{div}(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \rho c_v \frac{u_0}{e} y \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) &= 0
 \end{aligned}$$

L'équation (II.1) devient donc:

$$\frac{\rho c_v u_0}{e} y \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{V.1})$$

En utilisant un schéma à 2Δ pour l'approximation des dérivées secondes et un schéma centré d'ordre 2 pour l'approximation des dérivées premières l'équation (V.1) s'écrit:

$$\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \left(\rho C_v u_x - \frac{\lambda_{i+1}^j - \lambda_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) - \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2\Delta y} \times \frac{\lambda_{i+1}^{j+1} - \lambda_{i-1}^{j+1}}{2\Delta y} - \lambda_i^j \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \lambda_i^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Ce schéma de différences finies est implanté dans le système linéaire matriciel d'équation $AT = B$, à travers la matrice A . Ainsi le script prend en compte la variation de la conductivité

thermique, de la capacité thermique et de la viscosité pour le calcul de la température. Numériquement, pour prendre en compte la variation des caractéristiques du fluide dans le calcul de la température il faut créer un vecteur de la taille du vecteur B contenant les valeurs des caractéristiques qui varient. Pour un débit donné il faut effectuer le calcul de la température et mettre à jour le vecteur des caractéristiques jusqu'à ce que la température dans le fluide se stabilise.

Si la viscosité μ est maintenant considéré comme dépendante de la température T alors, la vitesse $\vec{u}$ est elle aussi dépendante de T . Il faut donc calculer le gradient de pression. Pour ce faire il faut émettre l'hypothèse que le fluide rentre dans l'approximation des gaz parfaits donnant $PV = nRT$. Comme le fluide est incompressible le volume V est constant donc P ne dépend que de T . Un vecteur MatLab associant une vitesse à chacune des particules fluides en fonction de T et de μ est créé (variant linéairement avec T).

Pour un débit arbitraire Q :

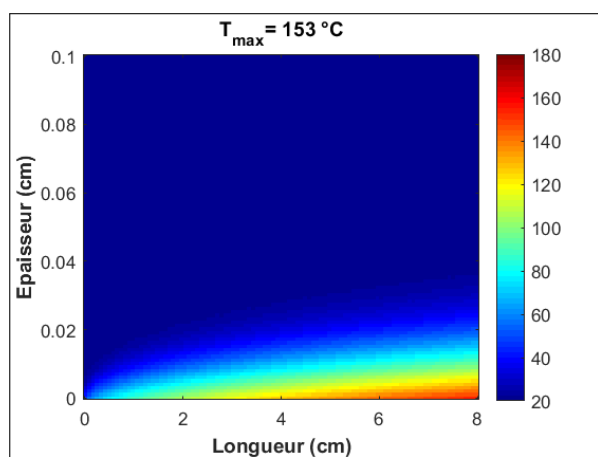


Figure 8: Film sans variation des caractéristiques de l'huile en fonction de T

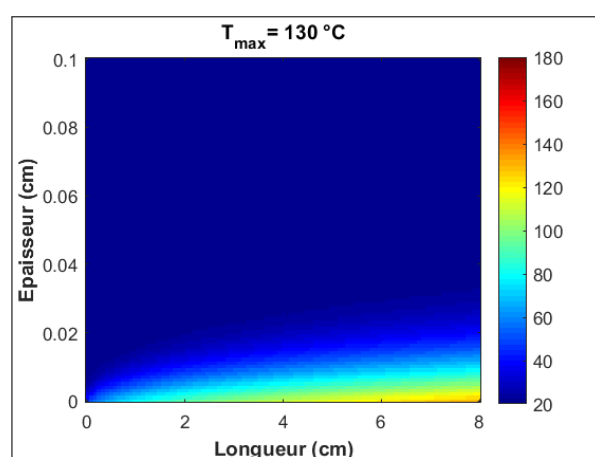


Figure 9: Film avec variation de λ et c_v de l'huile en fonction de T

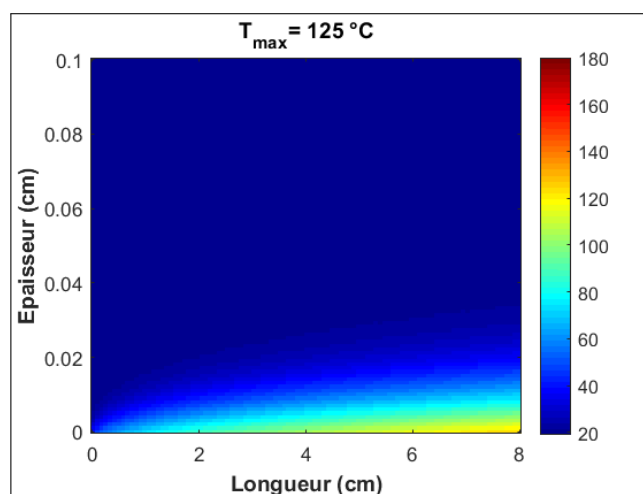


Figure 10: Film avec variation de λ , c_v et μ de l'huile en fonction de T

Après comparaison des figures 8 et 9, une différence de température est observée. En effet,

lorsque les caractéristiques du fluide évoluent en fonction de sa température, la température à la sortie du film est moins élevée. Cette diminution est due au fait que la conductivité thermique λ diminue faiblement quand la température augmente alors que la capacité calorifique c_v augmente elle fortement.

De plus après comparaison des figures 9 et 10 une nouvelle différence de température est observée. En effet la viscosité dynamique μ diminue avec la température amplifiant le phénomène de convection.

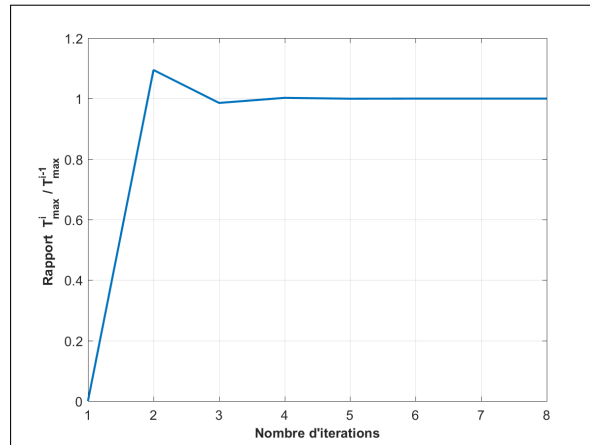


Figure 11: Stabilité de la variation de T en fonction de la variation de λ et C_v

La figure 11 représente le rapport entre la température pour la valeur courante des constantes c_v et λ et la valeur de ces constantes à l'itération précédente. Sur cette figure on observe que la température se stabilise après approximativement 6 itérations.

Après ces 6 itérations la température chute de 25°C .

V.3 Vérification de la validité de la condition limite en $y = e$

Dans la modélisation, il a été décidé de prendre en condition limite pour $y = e$ que la température correspond à la température de l'extérieur (II.4). Seulement le fluide échange en réalité un flux de chaleur avec l'extérieur. La question a donc été de savoir si la modélisation est valide. Pour vérifier cette validité il faut tracer une couche limite thermique, c'est à dire une ligne où la température du fluide a augmenté de 1% par rapport à la température extérieure. La condition est valide tant que la couche limite n'atteint pas le haut du fluide.

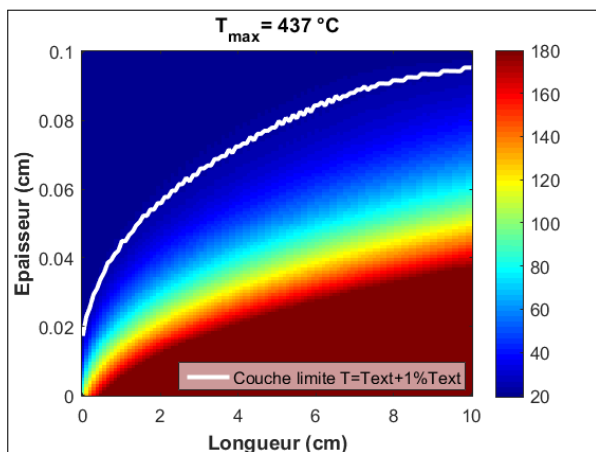


Figure 12: Couche Limite a 1% pour un débit faible

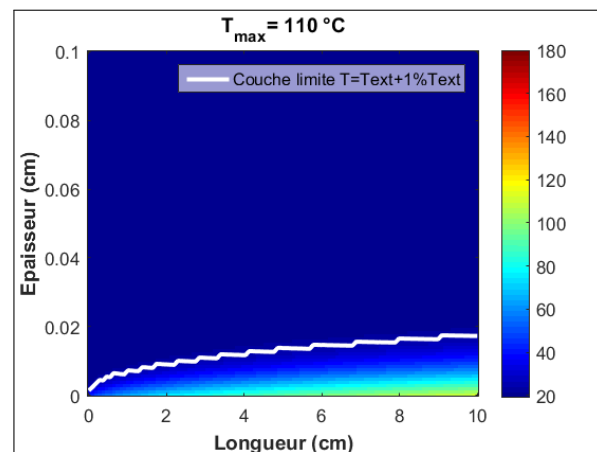


Figure 13: Couche Limite a 1% pour un haut débit

Pour des débits faibles, [12], le plus haut de la couche limite a 1% est très proche de $y = e$. Cependant pour des débits plus importants (les débits acceptables), [13], cette même couche limite ne s'approche plus du haut du film. La condition à la limite haute ([II.4]) a du sens. Le modèle est donc valide.

V.4 Dimensionnement: Fluide et débit

Dans cette partie, l'intérêt que le fluide soit de l'huile va être étudié. En effet, une comparaison entre l'huile de moteur, l'eau et l'air va être réalisée afin de montrer que les caractéristiques de l'huile sont celles qui correspondent le mieux pour éviter une surchauffe du moteur. Il faut donc, pour chacun des fluides créer un graphique de la température en fonction du débit.

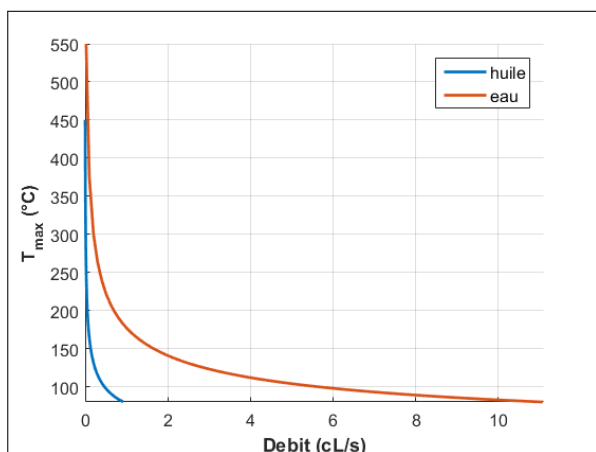


Figure 14: Température en fonction du débit pour l'huile et l'eau

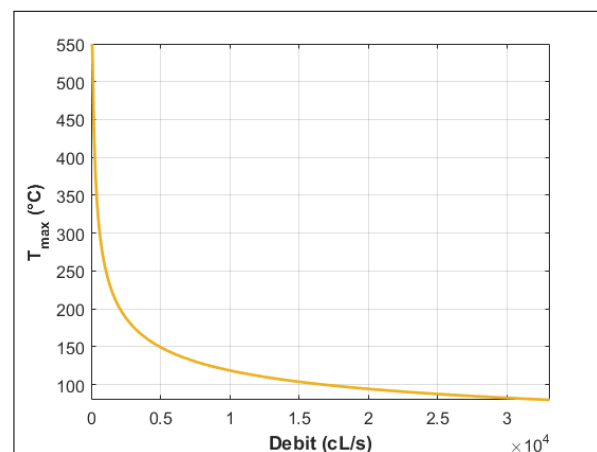


Figure 15: Température en fonction du débit pour de l'air

Sont tracées sur les figures [14], [16] et [15] la température maximale en fonction du débit. En fonction de la température maximale acceptable, le débit minimal est obtenu. Il est donc possible de voir qu'avec de l'air le débit minimal nécessaire pour rester dans une gamme de températures acceptable, est beaucoup trop élevé et donc techniquement inatteignable.

Le débit minimal acceptable pour de l'eau, comme vu sur la figure 14, est élevé mais reste atteignable. Cependant l'huile offre des résultats beaucoup plus intéressants en ce qui concerne le refroidissement du moteur (un débit au moins 10x moins important pour l'huile). Il est donc cohérent d'utiliser une huile pour ce problème.

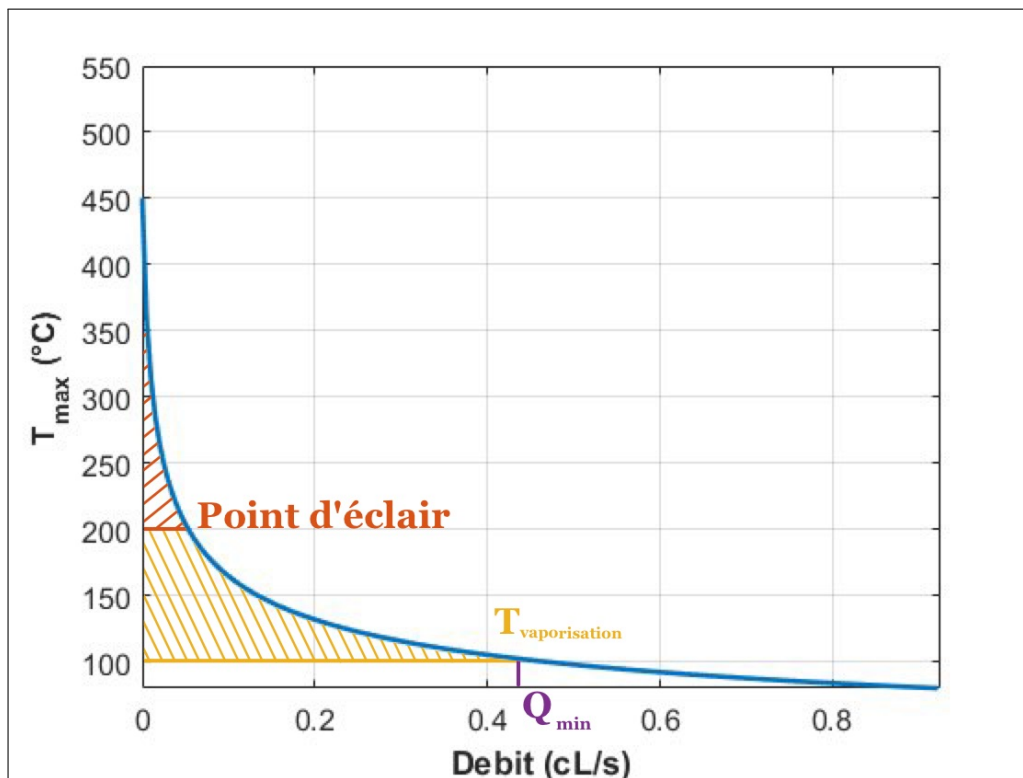


Figure 16: Température en fonction du débit pour une huile

Le graphe, figure 16, peut être utilisé pour déterminer le débit minimal pour atteindre la température maximale acceptable que l'huile peut accepter sans se vaporiser. Cette température sera de 100 °C. Le débit minimal à l'entrée du film doit ainsi être de 0.43 cL/s.

VI Conclusion

Lors de ce projet, le comportement d'un film fluide en contact direct avec la paroi d'un moteur a été modélisé, dans le but de refroidir celui-ci. Dans un premier temps, un modèle analytique, utilisant un relèvement et une analyse spectrale, ainsi qu'un modèle numérique se basant sur les différences finies ont été construits. Les deux modèles ont ensuite été confrontés afin de s'assurer de leur pertinence.

Une fois assuré que le modèle numérique soit juste, une amélioration du modèle a été réalisée afin de rendre ce modèle théorique plus réaliste. Certaines modifications ont été réalisées afin de rendre l'évolution de la température dans le fluide fidèle à la réalité, tels que: le type d'écoulement du fluide ainsi que ses caractéristiques chimiques et thermiques, susceptible d'être modifié au cours de l'écoulement.

Certes le modèle est relativement proche de la réalité et peut servir de première approche acceptable. Cependant il implique encore quelques limites. En effet le modèle n'est valable que dans le plan de la buse (où l'écoulement est plan) et sur les parties du cylindre où le film a une épaisseur constante. Ailleurs, le profil de vitesse ne peut plus être aussi simplement décrit car certaines hypothèses ne sont plus valables.

De plus le modèle ne prend pas en compte l'impact des cycles successifs. En effet la température en sortie de la buse reste toujours la même. Or pour un grand nombre de cycles, l'huile en sortie ne pourra pas dissiper toute la chaleur emmagasinée pendant le cycle, et aura tendance à avoir une température plus élevée à l'entrée du cycle suivant.

Le modèle peut encore être amélioré, mais il constitue une base sérieuse de travail, assez fidèle à la réalité pour une première approche. Dans certains cas pratiques, les limites peuvent même être considérées comme négligeables.

VII Annexe & Bibliographie

VII.1 Annexe

• Méthode spectrale :

★ Pour le cas $c=0$:

(III.8) donne $\overline{T}_y'' = 0$, donc:

$$\overline{T}_y(y) = Ay + B$$

Aux limites du domaine cette équation devient :

$$(III.7) : \overline{T}_y'(y) = A \rightarrow \overline{T}_y'(0) = 0 = A$$

$$(III.5) : \overline{T}_y(e) = 0 = B$$

On obtient $\overline{T}_y(y) = 0$.

Or $\overline{T}_y(y)$ ne doit pas être identiquement nulle. Ce résultat n'est donc pas intéressant dans le cadre de l'étude.

★ Pour le cas $c < 0$:

(III.8) donne $r^2 = -c > 0$, donc:

$$\overline{T}_y(y) = Ae^{\sqrt{-c}y} + Be^{-\sqrt{-c}y}$$

Aux limites du domaine cette équation devient :

$$(III.7) : \overline{T}_y'(y) = \sqrt{-c}Ae^{\sqrt{-c}y} - \sqrt{-c}Be^{-\sqrt{-c}y} \rightarrow \overline{T}_y'(0) = 0 = \sqrt{-c}(A - B) \rightarrow A = B$$

$$(III.5) : \overline{T}_y(e) = 0 = A(e^{\sqrt{-c}e} + e^{-\sqrt{-c}e}) \rightarrow A = 0$$

On obtient $\overline{T}_y(y) = 0$.

Or $\overline{T}_y(y)$ ne doit pas être identiquement nulle. Ce résultat n'est donc pas intéressant dans le cadre de l'étude.

★ Pour le cas $c > 0$:

(III.8) donne $r^2 = -c < 0$, donc:

$$\overline{T}_y(y) = A \cos(\alpha y) + B \sin(\alpha y)$$

Aux limites du domaine cette équation devient :

$$(III.7) : \overline{T}_y'(y) = -\alpha A \sin(\alpha y) + \alpha B \cos(\alpha y) \rightarrow \overline{T}_y'(0) = 0 = \alpha B \rightarrow B = 0$$

$$(III.5) : \overline{T}_y(e) = 0 = A \cos(\alpha e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit: } A = 0 \implies \overline{T}_y(y) = 0 \rightarrow \text{Ce résultat n'est pas intéressant} \\ \text{soit: } \cos(\alpha e) = 0 \iff \alpha_k = \frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \text{ avec } k \text{ un entier.} \end{array} \right.$$

• Résolution numérique pour un nombre de maille 3×33

L'équation discrétisée est la suivante :

$$\frac{\lambda}{\rho c_v} \left(\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}}{\Delta y^2} \right) - u_0 \left(\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) = 0$$

Cette équation et les conditions précédemment trouvées permettent d'avoir le système suivant :

$$\begin{cases} T_1^1 = T_{ext} \\ T_1^2 = T_{ext} \\ T_1^3 = T_{ext} \\ T_2^2 - T_2^1 = \frac{q_0 \Delta x}{\lambda} \\ \frac{\lambda}{\rho c_v} \left(\frac{T_3^2 - 2T_2^2 + T_1^2}{\Delta x^2} + \frac{T_2^3 - 2T_2^2 + T_2^1}{\Delta y^2} \right) - u_0 \left(\frac{T_3^2 - T_1^2}{2\Delta x} \right) = 0 \\ T_2^3 = T_{ext} \\ T_3^1 - T_2^1 = 0 \\ T_3^2 - T_2^2 = 0 \\ T_3^3 = T_{ext} \end{cases}$$

Il est possible d'écrire le système suivant sous forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & b & d & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_1^3 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \\ T_2^3 \\ T_3^1 \\ T_3^2 \\ T_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ext} \\ T_{ext} \\ T_{ext} \\ \frac{q_0 \Delta x}{\lambda} \\ 0 \\ T_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ T_{ext} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1})$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{\lambda}{\rho C_v \Delta x^2} + \frac{u_0}{2\Delta x} \\ b = \frac{-2\lambda}{\rho C_v} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \\ c = \frac{\lambda}{\rho C_v \Delta x^2} - \frac{u_0}{2\Delta x} \\ d = \frac{\lambda}{\rho C_v \Delta y^2} \end{cases}$$

Connaissant les valeurs de la matrice A et B , la matrice T est déduite. Cette première méthode va permettre de mettre en place un système empirique pour créer les trois matrices.

VII.2 Bibliographie

References

- [1] Julien Laget, *Modèles d'écoulement : Navier-Stokes et Euler*, cours, 2022/2023.
- [2] Jean Ayel, *lubrifiants : propriétés et caractéristiques*, site internet, Technique de l'Ingénieur, 1996.
<https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mecanique-th7/lubrification-42465210/lubrifiants-b5340/caracteristiques-thermiques-et-d-inflammabilite-b5340niv10006.html>
- [3] Franck Nicoud, *Différences finies*, cours, 2022/2023.