

VALDIR PIGNATTA E SILVA

Flambagem Lateral de Vigas de Aço  
em Regime Elástico-Linear

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

São Paulo

1992

VALDIR PIGNATTA E SILVA  
Engenheiro Civil - EPUSP - 1975

FLAMBAGEM LATERAL  
DE  
VIGAS DE AÇO  
EM  
REGIME ELÁSTICO - LINEAR

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração:  
Engenharia de Estruturas

Orientador:  
Prof. Dr. Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo  
1992

*Este trabalho é dedicado*

*À esposa Celenita*

*As filhas Andressa e Adriana*

*Ac saudosos pai Leandro*

## A G R A D E C I M E N T O S

O autor agradece

ao Prof. Dr. Luiz Antonio Cortese Diogo pelo apoio e orientação ao longo de todo trabalho.

ao Prof. Dr. Victor M. Souza Lima pelo incentivo recebido e pela confiança nele depositada.

aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações pelos valiosos ensinamentos e constante solicitude durante o curso de pós-graduação.

à professora Olga Pignatta e Silva, sua mãe, com quem aprendeu o quão importante é o conhecimento e mais ainda a sua disseminação.

à Companhia Siderúrgica Paulista - COSIPA por ter-lhe permitido a realização deste antigo desejo.

# SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	
RESUMO	
"ABSTRACT"	
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 OBJETIVO .....	1
1.2 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DO TEMA .....	2
2 HISTÓRICO .....	4
3 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ESTABILIDADE .....	9
3.1 CONCEITO DE ESTABILIDADE .....	9
3.2 TIPOS DE INSTABILIDADE .....	10
3.2.1 Instabilidade estática .....	10
3.2.1.1 Ponto limite .....	11
3.2.1.2 Bifurcação de equilíbrio (flambagem) .....	12
3.2.2 Instabilidade dinâmica .....	13
3.2.2.1 Galope .....	13
3.2.2.2 Ressonância por vórtice .....	13
3.2.2.3 Drapejamento .....	14
3.3 DETERMINAÇÃO DO NÍVEL DE CARREGAMENTO CRÍTICO .....	14
3.3.1 Método energético .....	15
3.3.1.1 Exemplo de aplicação .....	18
3.3.2 Análise numérica via Método dos Elementos Finitos ..	21
3.3.3 Critérios adotados nesta Dissertação .....	24
4 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO DE VIGAS COM SEÇÃO MONOSSIMÉTRICA .....	26

4.1 DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS ADICIONAIS ASSOCIADOS À CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO PÓS-CRÍTICO (MASUR E MILBRADT).....	26
4.1.1 Deslocamentos devidos à torção com empenamento ....	29
4.1.2 Deslocamentos devidos à flexão no plano perpendicular ao eixo x .....	30
4.1.3 Deslocamentos devidos à flexão no plano perpendicular ao eixo y .....	33
4.1.4 Deslocamentos totais .....	34
4.1.5 Compatibilidade entre deformação e deslocamentos ...	36
4.1.6 Equilíbrio dos esforços .....	39
4.1.6.1 Força normal .....	39
4.1.6.2 Momentos fletores .....	42
4.1.6.2.1 Direção x .....	42
4.1.6.2.2 Direção y .....	44
4.2 FUNCIONAL DA ENERGIA POTENCIAL ADICIONAL .....	45
4.2.1 Energia de deformação adicional .....	45
4.2.1.1 Energia de deformação adicional devida ao alongamento .....	46
4.2.1.2 Energia de deformação adicional devida à distorção por torção .....	48
4.2.1.3 Funcional adotado .....	53
4.2.2 Energia potencial adicional dos esforços externos ..	54
4.2.3 Energia potencial adicional .....	56
4.3 DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DO MOMENTO CRÍTICO (CLARK E HILL) .....	56
5 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GERAL PARA DIVERSOS ESQUEMAS ESTRUTURAIS .....	64
5.1 COEFICIENTE ASSOCIADO AO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES ( $C_b$ ) .....	64
5.1.1 Vigas sem carregamento transversal. (SALVADORI) ....	64
5.1.1.1 Método de Rayleigh com a utilização de um termo da série .....	65
5.1.1.2 Método de Ritz com a utilização de um termo da série .....	67

5.1.1.3	Método de Ritz com a utilização do número adequado de termos .....	70
5.1.1.4	Comparação entre resultados .....	73
5.1.2	Vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou força concentrada no meio do vão. Equações diferenciais (AUSTIN/TIMOSHENKO) .....	74
5.1.3	Vigas biapoiadas submetidas a duas forças concentradas (SCHRADER) .....	80
5.1.4	Vigas biapoiadas e com travamento lateral (TIMOSHENKO e DE VRIES) .....	81
5.1.5	Vigas em balanço .....	83
5.1.5.1	Carga concentrada (TIMOSHENKO) .....	83
5.1.5.2	Carregamento uniformemente distribuído (POLEY) ...	85
5.1.6	Conclusões .....	87
5.2	COEFICIENTE ASSOCIADO À POSIÇÃO DO CARREGAMENTO ( $C_p$ ) .	88
5.2.1	Vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou força concentrada no meio do vão. (AUSTIN) .....	89
5.2.2	Vigas biapoiadas submetidas a duas forças concentradas (SCHRADER) .....	91
5.2.3	Vigas biapoiadas e com travamento lateral (TIMOSHENKO e DE VRIES) .....	93
5.2.4	Vigas em balanço (NETHERCOT) .....	95
5.2.5	Conclusões .....	97
5.3	COEFICIENTE ASSOCIADO À MONOSSIMETRIA DA SEÇÃO.....	98
5.3.1	Vigas submetidas a momento constante .....	98
5.3.2	Vigas submetidas a carregamento transversal .....	100
5.3.3	Conclusões .....	102
5.4	COEFICIENTE ASSOCIADO AO TIPO DE VINCULAÇÃO (K) .....	103
5.4.1	Apoio simples .....	104
5.4.2	Engastamento perfeito .....	104
5.4.3	Vigas em balanço .....	105
5.4.4	Conclusões .....	106
6	MOMENTO CRÍTICO DE VIGAS COM SEÇÃO QUALQUER SUBMETIDAS A MOMENTO CONSTANTE (GOODIER/TIMOSHENKO) .....	107

7 RECOMENDAÇÕES DE NORMAS .....	109
7.1 AISC/LRFD/86 .....	111
7.2 AISI/86 .....	112
7.3 NBR 8800/86 .....	114
7.4 MOMENTO FLETOR LIMITE PARA FLAMBAGEM ELÁSTICA .....	115
8 EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	117
9 CONCLUSÕES .....	120
ANEXO A - O AÇO PARA ESTRUTURAS METÁLICAS .....	125
A.1 PROCESSO SIDERÚRGICO .....	127
A.2 TENSÕES RESIDUAIS .....	131
A.3 TIPOS DE AÇOS .....	132
A.4 TIPOS DE PERFIS .....	135
A.4.1 Perfis soldados .....	135
A.4.2 Perfis formados a frio .....	136
A.4.3 Perfis laminados .....	138
ANEXO B - FORMULÁRIO SIMPLIFICADO PARA CÁLCULO DE CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS .....	140
B.1 COEFICIENTE DE MONOSSIMETRIA (k) .....	140
B.2 CONSTANTE DE EMPENAMENTO ( $C_w$ ) .....	141
B.3 DISTÂNCIA ENTRE CENTRO DE GRAVIDADE E CENTRO DE TORÇÃO ( $y_c$ ) .....	142
B.4 MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO ( $I_t$ ) .....	143
ANEXO C TABELA RESUMO .....	144
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	147



## LISTA DE SÍMBOLOS

- A - área
- $A_s, A_i$  - área da mesa superior e área da mesa inferior, respectivamente
- a - distância entre o ponto de aplicação do carregamento e o centro de torção (positivo quando o ponto de aplicação do carregamento estiver acima do centro de torção)
- $b_f$  - largura da mesa
- C - centro de torção
- $C_b$  - coeficiente associado ao diagrama de momentos fletores
- $C_k$  - coeficiente associado á monossimetria da seção
- $C_p$  - coeficiente associado ao ponto de aplicação do carregamento
- $C_w$  - constante de empenamento
- d - altura da seção
- E - módulo de elasticidade. Para os aços  $E = 205\ 000$  MPa
- $f_r$  - tensão residual. Para os aços  $f_r = 115$  MPa
- $f_u$  - limite de resistência
- $f_y$  - limite de escoamento
- G - módulo de deformação transversal. Para os aços  $G = 0,385 E$
- h - distância entre as linhas médias das mesas
- $h_s, h_i$  - distância entre o centro de torção e a linha média da mesa superior e da mesa inferior, respectivamente
- I - momento de inércia

$I_{cp}$  - momento de inércia polar em relação ao centro de torção  
 $I_s, I_i$  - momento de inércia, em relação ao eixo  $y$ , da mesa superior e da mesa inferior respectivamente  
 $I_t$  - momento de inércia à torção  
 $I_x, I_y$  - momento de inércia em relação aos eixos  $x$  e  $y$   
 $K$  - coeficiente associado ao tipo de vínculo  
 $k$  - coeficiente de monossimetria =  $y_c - \frac{1}{2I_x} \int_A (x^2 + y^2) y \, dA$   
 $\ell$  - comprimento do trecho de viga considerado, distância entre travamentos  
 $M$  - momento fletor  
 $\bar{M}$  - momento fletor máximo, no trecho de viga considerado  
 $M_{cr}$  - momento crítico  
 $M_r$  - momento fletor limite para flambagem elástica  
 $O$  - centro geométrico  
 $O(\delta^n)$  - ordem maior ou igual a  $n$   
 $p$  - carregamento  
 $r_{cp}$  - raio de giração polar em relação ao centro de torção  
 $t_f$  - espessura da mesa  
 $t_s, t_i$  - espessura da mesa superior e da mesa inferior, respectivamente  
 $t_w$  - espessura da alma  
 $u, v, w$  - deslocamentos adicionais de  $C$   
 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  - deslocamentos totais de  $C$   
 $u_p, v_p, w_p$  - deslocamentos adicionais de um ponto genérico  $P$   
 $\bar{u}_p, \bar{v}_p, \bar{w}_p$  - deslocamentos totais de um ponto genérico  $P$   
 $v_0, w_0$  - deslocamentos iniciais de  $C$   
 $W$  - módulo elástico de resistência

- $Y_c$  - ordenada do centro de torção (positiva quando o centro de torção estiver abaixo do centro geométrico)
- $Z$  - módulo plástico de resistência
- $\alpha$  - ângulo
- $\beta, \gamma$  - ângulos de rotação, na flexão
- $\delta$  - ordem de grandeza (pequena)
- $\varepsilon_p$  - deformação adicional em um ponto genérico P
- $\bar{\varepsilon}_p$  - deformação total em um ponto genérico P
- $\varepsilon_{p0}$  - deformação inicial em um ponto genérico P
- $\mu = \frac{G I_t}{E C_w} \ell^2$
- $\nu$  - coeficiente de Poisson. Para os aços  $\nu = 0,3$
- $\psi$  - função empenamento
- $\theta$  - ângulo de torção

## RESUMO

Neste trabalho, foi deduzida a equação geral para a determinação do momento crítico à flambagem lateral de vigas com seção monossimétrica, em regime elástico e analisados diversos casos particulares.

Foi feita uma comparação com as recomendações da Norma Brasileira (NBR 8800/86) e Especificações Americanas (AISC/LRFD/86 e AISI/86). Foram indicadas e comentadas as limitações no uso das expressões presentes nessas Normas.

Foi incluído também um resumo dos principais resultados numéricos para uso no cálculo expedito do momento crítico em esquemas estruturais convencionais.

## ABSTRACT

In this paper, the general equation for the elastic lateral buckling critical moment of beams with monosymmetrical section was derived and an analysis about several particular cases was carried out.

A comparison with the recommendations of the Brazilian Standard (NBR 8800/86) and American Specifications (AISC/LRFD/86 and AISI/86) was made. The limitations in the use of the expressions presents in those Standards were shown and commented.

A resume of the main numerical results was also included to use in the expeditious determination of critical moment in conventional structures schemes.

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é demonstrar o formulário, apresentado na norma brasileira NBR 8800 e normas americanas AISC/LRFD e AISI, para a determinação do valor do momento fletor que causa, em regime elástico-linear, bifurcação na trajetória de equilíbrio de uma viga de aço em flexão simples, ou seja momento crítico à flambagem lateral por flexo-torção. Serão indicadas as simplificações implícitas nas expressões das normas e as limitações daí resultantes, dentro das hipóteses adotadas para sua dedução.

Será analisada a influência da variação do momento fletor ao longo do eixo da viga, da assimetria da seção, da posição do carregamento e das condições de vínculo.

## 1.2 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DO TEMA

O consumo de aço utilizado na construção metálica, no Brasil, é 2 a 3 kg/habitante/ano enquanto nos países desenvolvidos é 12 a 15 kg/habitante/ano.

Várias são as razões alegadas para essa enorme diferença:

- custo, embora muitas vezes confundido-se custo da estrutura e custo do empreendimento;
- complexidade, embora somente aparente, do mercado do aço;
- inexperiência de projetistas e construtores;
- baixo nível de ensino nos cursos de graduação de engenharia e arquitetura;
- parca literatura nacional sobre o assunto;
- imobilismo dos empreendedores;
- razões culturais.

O tema deste trabalho foi escolhido tendo em vista que seu autor, siderurgista há anos, se viu na obrigação de contribuir, dentro de suas possibilidades, com esse mercado, que necessita crescer a fim de que nosso país possa futuramente se alinhar ao mundo desenvolvido.

Muitos tópicos na área das estruturas metálicas ainda são pouco conhecidos dos engenheiros calculistas brasileiros, por exemplo: dimensionamento de barras comprimidas sujeitas à flambagem por flexo-torção, dimensionamento de barras sujeitas a torção não uniforme, dimensionamento de perfis formados a frio, e outros.

O autor optou, no entanto, pelo estudo da flambagem lateral de vigas, assunto, presente praticamente em todo dimensionamento de vigas de aço.

A razão da escolha é que, mesmo neste tópico, supostamente bastante conhecido, há muito a ser pesquisado e divulgado. As normas, mesmo as mais modernas e menos conhecidas no Brasil, são limitadas e incompletas.

Aproveitou-se assim o privilégio de poder elaborar uma Dissertação de Mestrado nessa área, apoiado nos conceitos aprendidos nas disciplinas de pós-graduação complementados por pesquisa bibliográfica, para contribuir com a melhoria da literatura técnica nacional sobre o assunto.



## 2 HISTÓRICO

Os primeiros ensaios envolvendo a análise do fenômeno de flambagem lateral em vigas, com a utilização de perfis laminados, foram, segundo JOHNSTON (1976), devidos a FAIRBAIRN em 1854, que concluiu, corretamente, que um aumento na espessura e largura da mesa comprimida da viga aumenta a resistência à flambagem lateral.

A primeira solução teórica, segundo BLEICH (1952), para a flambagem de vigas com seção retangular, esbelta, submetidas a algumas condições de carregamento, foi devida a PRANDTL em 1899, que deduziu as equações diferenciais, que governam o fenômeno. MICHEL, também em 1899, independentemente de Prandtl, deduziu as equações diferenciais associadas à viga simplesmente apoiada submetida a momento constante, chegando a resultados compatíveis com os de Prandtl.

TIMOSHENKO, entre 1905 (apud TIMOSHENKO (1961)) e 1936, deduziu a equação diferencial fundamental da torção, para seção duplamente simétrica em forma de "I" (o caso geral foi deduzido por WAGNER em 1929 (apud GOODIER (1942) e TIMOSHENKO (1961)) que utilizou certas características geométricas relativas à torção, posteriormente generalizadas por VLASSOV em 1936 (apud VLASSOV (1962)) e desenvolveu um método energético, especialmente para aplicá-lo na solução do fenômeno da

flambagem, a partir do que, resolveu diversos casos particulares de vigas, simplesmente apoiadas, com seção duplamente simétrica em forma de "I" (VLASSOV em 1962 confirmou estes resultados para o caso geral de seções duplamente simétricas) sob vários tipos de carregamento com diferentes pontos de aplicação. GOODIER, em 1942, a partir da equação diferencial da torção determinada por WAGNER, deduziu a expressão para cálculo do momento crítico de vigas com seção qualquer, porém submetidas à momento constante. WINTER em 1943 analisou o caso de vigas com seção monossimétrica submetidas a carregamento transversal (carga concentrada no meio do vão). BLEICH em 1952 apresentou um funcional da energia potencial adicional correspondente a vigas com seção monossimétrica submetida a carregamento qualquer.

Outros importantes trabalhos, baseados em diversos métodos numéricos, foram publicados nas décadas de 40 e 50, resolvendo casos particulares para vigas com seção duplamente simétrica ou monossimétrica, diversos tipos de carregamentos, com diferentes pontos de aplicação e vários tipos de apoio.

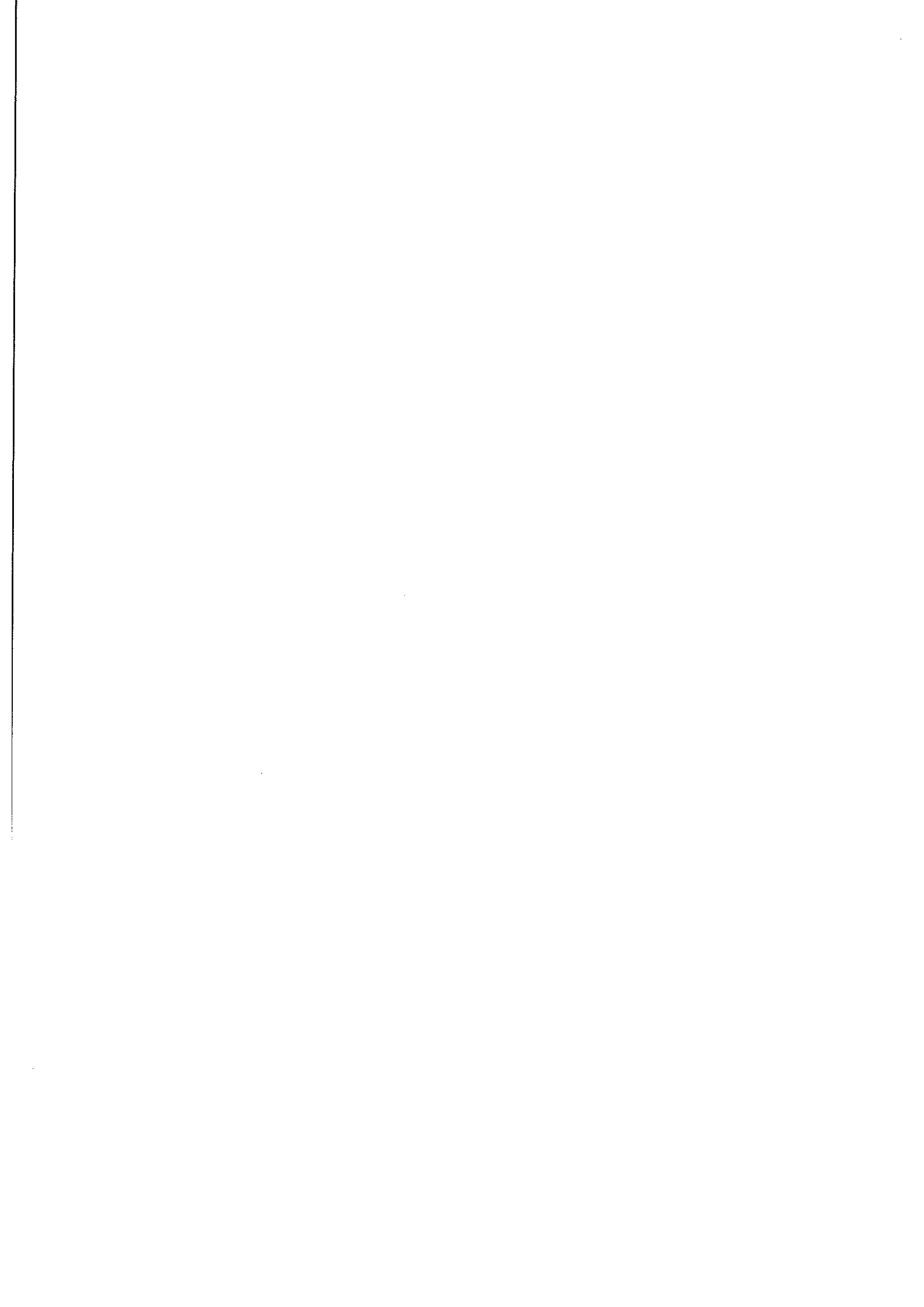
Destacam-se: SCHRADER, 1943, DE VRIES, 1947, SALVADORI, 1955, que utilizaram métodos energéticos, POLEY, 1954, método das diferenças finitas e AUSTIN et al., 1955, solução das equações diferenciais.

MASUR e MILBRADT, em 1957, publicaram trabalho apresentando uma equação diferencial, para uma viga com seção monossimétrica, que correlaciona os deslocamentos adicionais associados à configuração de equilíbrio pós-crítico, isto é, os deslocamentos totais pós-flambagem menos os deslocamentos

calculados pela teoria linear. Baseando-se nesta correlação, indicaram o funcional da energia potencial adicional mais completo, entre os encontrados nas bibliografias pesquisadas. A partir desse funcional, CLARK e HILL, em 1962, deduziram a equação geral para cálculo do momento crítico de uma viga com seção monossimétrica, submetida a qualquer carregamento, aplicado em qualquer ponto e para qualquer tipo de vínculo. A generalização desta expressão, leva à necessidade da determinação de quatro coeficientes dependentes tão somente do tipo de carregamento e vinculação. CLARK e HILL, baseando-se em alguns dos trabalhos citados anteriormente, indicaram tais coeficientes para diversas situações estruturais.

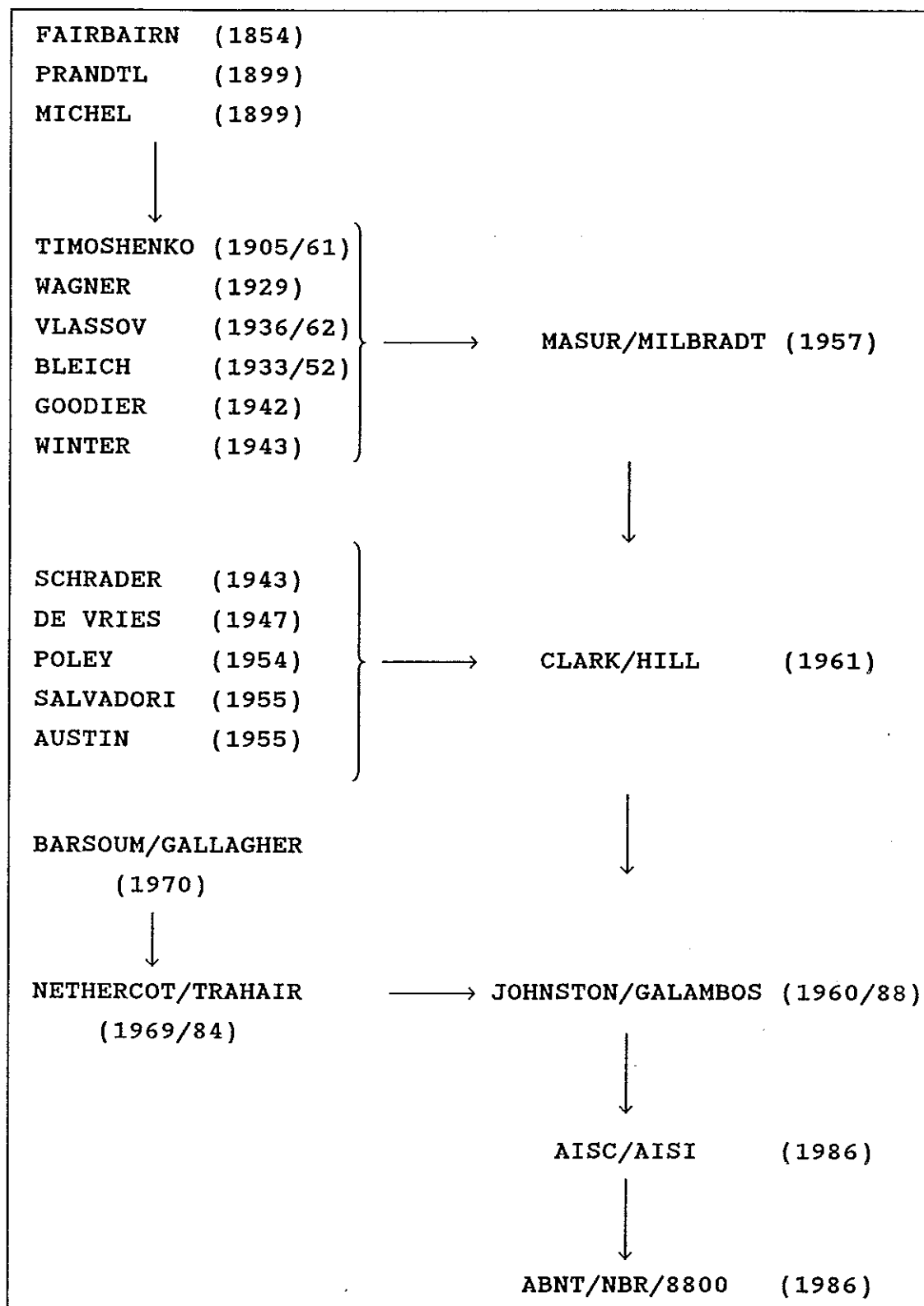
A norma americana mais recente, que trata do assunto, foi publicada em 1986, e a última edição do "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", patrocinada pelo "Stability Research Council" foi editada por GALAMBOS em 1988, onde são referenciados os trabalhos mais recentes sobre o assunto, destacando-se várias publicações de NETHERCOT e TRAHAIR, entre 1969 e 1984. Tais trabalhos têm apresentado apenas algumas modificações na forma de calcular o momento crítico, por exemplo, propõem uma fórmula geral mais simples do que a deduzida por CLARK, com apenas um coeficiente a determinar, porém tal determinação tornou-se mais trabalhosa. Não houve qualquer outro trabalho que tenha alterado ou ampliado substancialmente os resultados conhecidos a partir dos trabalhos citados anteriormente.

Nesta Dissertação, baseando-se nos trabalhos já citados, e outros publicados posteriormente ao de CLARK (BARSOUM e



GALLAGHER, 1970, precursores no uso do método dos elementos finitos, neste campo (neste mesmo ano POWELL e KLINGNER, apresentaram outro trabalho baseado no método dos elementos finitos, porém com menor abrangência), ANDERSON e TRAHAIR, 1972, método das integrais finitas e NETHERCOT, 1973, aplicação do trabalho de BARSOUM), são desenvolvidos os cálculos dos coeficientes idealizados por CLARK, para os mesmos esquemas estruturais apresentados em seu trabalho, e alguns outros não constantes das bibliografias consultadas. Na folha seguinte será apresentada de forma esquemática esta evolução histórica.

\*FLAMBAGEM LATERAL DE VIGAS-EVOLUÇÃO HISTÓRICA(1854-1988)\*



### 3 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Esta Dissertação trata da flambagem lateral de vigas em regime elástico, caso típico de instabilidade estática elástica associada à existência de bifurcação na trajetória de equilíbrio. Julgou-se necessário, porém, incluir conceitos e informações que tornem mais claro este caso particular de instabilidade, inserindo-o em um contexto mais amplo, que envolve também outro caso importante de instabilidade estática elástica, ou seja, o ponto limite, bem como casos ligados à instabilidade dinâmica.

Este capítulo é baseado em BOTELHO (1978), MAZZILLI (1979) e (1991) e BRASIL (1991)

#### 3.1 CONCEITO DE ESTABILIDADE

A conceituação de estabilidade, para que seja suficientemente abrangente, deve levar em consideração que todo processo de desestabilização é tipicamente um fenômeno dinâmico. A estabilidade do equilíbrio deve ser considerada como um caso particular da estabilidade do movimento.

Há várias definições de estabilidade dependendo da interpretação das variáveis intervenientes no fenômeno, ou seja: estado básico (estado fundamental ou estado não perturbado) de equilíbrio ou de movimento; tipo de perturbação introduzida ao

sistema: nas condições iniciais ou na estrutura das equações (alteração no modelo matemático); prescrições dos limites admissíveis: estabilidade geométrica ou cinética, etc.

Leipholz propôs um conceito suficientemente geral que envolve as definições mais comuns de estabilidade: "Se a distância entre o estado perturbado e o estado básico permanecer dentro de limites prescritos para todo o tempo e para perturbações arbitrariamente definidas, então o estado básico será dito estável".

No caso da Engenharia Estrutural, tratando-se de perturbações pequenas e distâncias pequenas, pode-se adotar uma definição menos rígida de estabilidade: "Estabilidade é a tendência de um sistema permanecer próximo à sua configuração básica, quando pequenas perturbações encorajam o sistema a abandoná-la" (Brivtec).

### 3.2 TIPOS DE INSTABILIDADE

Na Engenharia de Estruturas ocorrem com grande frequência problemas que requerem a análise de sua estabilidade tanto na Estática como na Dinâmica das Estruturas.

#### 3.2.1 Instabilidade estática

A instabilidade estática é caracterizada pela redução progressiva da rigidez do sistema, com o aumento do parâmetro de carregamento, até a sua anulação. Pode ser estudada por processos estáticos e é típica de sistemas conservativos. Um



sistema é dito conservativo quando todos os esforços nele atuantes, internos ou externos são conservativos e um esforço é considerado conservativo quando seu trabalho, em qualquer deslocamento cinematicamente admissível (deslocamento virtual) do sistema sobre o qual ele age, depende exclusivamente da configuração inicial e configuração final do sistema.

Na Estática, dois são os tipos básicos de instabilidade do equilíbrio: ponto limite e bifurcação de equilíbrio.

A instabilidade elástica é o caso particular da instabilidade estática onde sistemas elásticos são modelados sem amortecimento.

#### 3.2.1.1 Ponto limite

Considere-se a estrutura, de comportamento não-linear, cuja resposta esteja representada na fig. 3.1. Observa-se a perda de rigidez ( $dP/dq$ ) com o aumento do parâmetro de carregamento, até que, ao atingir o ponto A, essa rigidez se anula. Na impossibilidade de existir uma configuração de equilíbrio para um incremento de carga, a estrutura procura outras posições de equilíbrio que podem existir ou não e que se existirem, estarão muito longe da configuração imediatamente anterior. O ponto A é denominado ponto limite e a carga correspondente a ele é a carga limite.

A instabilidade por ocorrência de ponto limite é característica de arcos abatidos, cascas delgadas, etc.

### 3.2.1.2 Bifurcação de equilíbrio (Flambagem)

O modelo estrutural associado à fig. 3.1 tem como característica apresentar uma única trajetória de equilíbrio.

Existe também a possibilidade de uma estrutura apresentar uma resposta onde os diversos estados de equilíbrio podem pertencer a duas trajetórias, isto é, há uma bifurcação na trajetória de equilíbrio (vide fig. 3.2). Nestes casos, a trajetória que contém a origem recebe o nome de trajetória primária, que é interceptada por outra, no ponto C, dita trajetória secundária. A trajetória primária se torna instável a partir do valor do carregamento onde ela se bifurca, denominado carregamento crítico.

A trajetória secundária, dependendo do sistema estrutural estudado, pode ser simétrica estável, simétrica instável ou assimétrica. Entende-se como simetria, quando as características de comportamento da estrutura, são independentes do sentido que o deslocamento generalizado possa tomar.

A instabilidade por ocorrência de bifurcação de equilíbrio, conhecida como flambagem, tem como exemplo os casos clássicos de Euler, bem como a flambagem lateral de vigas fletidas, tema desta Dissertação.

### 3.2.2 Instabilidade dinâmica

A instabilidade dinâmica é caracterizada pela anulação da capacidade de amortecimento de um sistema estrutural sob

efeito de vibração e deve ser estudada pela Dinâmica das Estruturas.

Na Dinâmica, três são os tipos de instabilidade do movimento destacáveis: galope, ressonância por vórtice e drapejamento.

#### 3.2.2.1 Galope

Galope ou "galloping" é um fenômeno normalmente associado a sistemas com um grau de liberdade que, submetidos a esforços externos (geralmente fluidos não conservativos) e devido a imperfeições sempre existentes, começa a se movimentar na direção normal à direção predominante do fluxo do fluido.

Dependendo das condições iniciais, este movimento oscilatório pode retornar ao estado de repouso ou tender a um outro estado estável de movimento chamado atrator periódico ou ciclo limite estável, podendo haver também ciclos limites instáveis.

Um exemplo clássico da ocorrência deste fenômeno é o de linhas de transmissão, submetidas à ação do vento, em países frios. Após uma nevasca, o gelo distribui-se irregularmente em torno dos cabos que, perdendo sua aerodinâmica, entram em vibração caracterizada por grandes amplitudes e baixa frequência.

#### 3.2.2.2 Ressonância por vórtice

Ressonância por vórtice é o mecanismo de instabilidade, devido a forças oscilatórias provocadas pela ocorrência de vórtices. Estes vórtices podem existir, por exemplo, quando um sistema estrutural está imerso em um fluido em fluxo. As forças

oscilatórias induzidas pelos vórtices são geralmente perpendiculares à direção predominante do fluido. Elas podem ter uma frequência próxima a uma das frequências naturais do sistema, levando-o assim a ressonância. Este tipo de vibração é caracterizado por pequenas amplitudes mas altas frequências. Podem ser citados como exemplos de ocorrência deste fenômeno as chaminés altas, estacas de estruturas marítimas, etc.

### 3.2.2.3 Drapejamento

Drapejamento ou "flutter" é o fenômeno de instabilidade resultante do acoplamento (troca de energia) de dois ou mais modos de vibração, devido, por exemplo, à exposição de um sistema a um fluido que lhe proporcione esforços não conservativos.

Um famoso exemplo da ocorrência deste fenômeno foi a ruína da ponte sobre o Rio Tacoma (Estado de Washington), destruída devido a ação de ventos, ainda que moderados, mas que propiciaram o acoplamento de modos de vibração consequentes da troca de energia entre o movimento de flexão, diretamente provocada pela ação dos ventos, e torção.

### 3.3 DETERMINAÇÃO DO NÍVEL DE CARREGAMENTO CRÍTICO

A determinação do nível de carregamento crítico pode ser feita a partir da montagem e solução, diretamente ou com o auxílio de métodos numéricos, das equações diferenciais que governam o fenômeno.

O problema pode ser resolvido também, com o auxílio do

denominado método energético, a partir da análise das variações do funcional da energia potencial do sistema.

### 3.3.1 Método energético

A determinação do nível de carregamento crítico e a análise da estabilidade da configuração de equilíbrio, pode ser feita a partir da análise das variações do funcional da energia potencial total do sistema estrutural com base no Teorema de Lagrange-Dirichlet.

A energia potencial total pode ser definida como a diferença entre a energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação ( $U$ ) e a energia potencial dos esforços externos ( $W$ ):

$$V = U - W$$

No caso da estabilidade estática e elástica,  $U$  depende exclusivamente dos deslocamentos generalizados  $q_i$ , enquanto  $W$  depende destes e dos esforços externos  $P_j$ .

As condições de equilíbrio para o sistema podem ser obtidas em função da energia potencial total  $V$  a partir do teorema de Lagrange-Dirichlet:

"É condição suficiente para a estabilidade de equilíbrio de uma configuração de um sistema que a energia potencial total seja mínima".

Este teorema proposto por Lagrange e demonstrado por Dirichlet é válido para sistemas conservativos e discretos.

Apesar de não se conhecer demonstração geral para o teorema recíproco, a ausência de contra-exemplos, após extensivo uso

do teorema, dá-lhe suficiente credibilidade.

Pode-se, portanto, adotar como válido que, a energia potencial total ser mínima é condição necessária e suficiente para a estabilidade do equilíbrio.

Assim sendo, entende-se que de todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis para o sistema estrutural (deslocamentos virtuais), aqueles que correspondem a configurações de equilíbrio, tornam a energia potencial total estacionária, isto é,  $\delta V = 0$ .

Adotando-se:

$$V = V(q_1, P)$$

então:

$$\delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 = 0$$

ou seja:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial q_1} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

cujas soluções  $P = P(q_1)$  fornecem o conjunto de possíveis estados de equilíbrio ou seja as trajetórias de equilíbrio.

É interessante observar, ainda, que a variação da energia potencial total  $\Delta V$  é um parâmetro adequado para a análise da estabilidade do equilíbrio, onde  $\Delta V = V(P, q_1 + \Delta q_1) - V(P, q_1)$ .

Se para um pequeno deslocamento virtual ( $\Delta q_1$ ),  $\Delta V > 0$ , isto é, a energia potencial das forças externas não excede o aumento da energia de deformação, qualquer que seja o deslocamento virtual, então a configuração básica será estável. Se por outro lado  $\Delta V < 0$  para algum deslocamento virtual então a

configuração básica será instável.

Intuitivamente percebe-se que é possível determinar-se o nível de carregamento crítico a partir de  $\Delta V = 0$  e com posterior minimização da solução.

Mas, pode-se escrever que:

$$\Delta V = \delta V + \delta^2 V + \delta^3 V + \dots$$

Na configuração básica  $\delta V = 0$ , portanto:

$$\Delta V = \delta^2 V + \delta^3 V + \dots$$

e para pequenos deslocamentos tem-se:

$$\Delta V \cong \delta^2 V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j$$

ou seja :

$$\Delta V \cong \{\delta q_i\}^T [V_{,ij}] \{\delta q_j\}$$

onde:

$$V_{,ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$$

Assim, de um modo pouco formal pode-se dizer que como, para a estabilidade da configuração de equilíbrio  $\delta^2 V \cong \Delta V > 0$ , então  $[V_{,ij}]$  deve ser positiva definida, e no caso da determinação do nível de carregamento crítico deve-se ter  $\delta^2 V \cong \Delta V = 0$ , o que implica em  $\det [V_{,ij}] = 0$ .

### 3.3.1.1 Exemplo de aplicação

A partir da fig. 3.3 e adotando-se  $q_1$  como deslocamento generalizado, pode-se escrever que:

$$U = \frac{1}{2} K_1 q_1^2 + \frac{1}{2} K_2 q_2^2$$

$$W = P \ell \left[ 2 - \cos q_1 - \cos (q_1 + q_2) \right]$$

Expandindo-se  $\cos q$  em série de Taylor e truncando-a nos termos de segunda ordem tem-se:

$$\cos q = 1 - \frac{q^2}{2}$$

Sendo  $V = U - W$ , tem-se:

$$V = \frac{1}{2} K_1 q_1^2 + \frac{1}{2} K_2 q_2^2 - P \ell \left[ \frac{q_1^2}{2} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{2} \right]$$

Baseando-se no "método energético" deve-se ter :

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad \forall \delta q_1$$

ou seja:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = K_1 q_1 - P \ell (2 q_1 + q_2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = K_2 q_2 - P \ell (q_1 + q_2) = 0$$

Rearranjando-se resulta:



$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{array} \right] - P \ell \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para haver solução diferente da trivial deve-se impor que:

$$\det \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{array} \right] - P \ell \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right] = 0$$

Resolvendo-se obtém-se:

$$P = \frac{K_1 + 2 K_2 \pm \sqrt{K_1^2 + 4 K_2^2}}{2 \ell}$$

O primeiro modo de flambagem se dará com o menor entre os dois valores encontrados para  $P$ , denominado  $P_{cr}$ .

Pode-se determinar o valor de  $P_{cr}$  também a partir de  $\Delta V = 0$ , ou, no caso deste exemplo,  $V = 0$ , com posterior minimização.

Assim tem-se:

$$P = \frac{1}{\ell} \frac{k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2}{2 q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2}$$

Minimizando-se obtém-se:

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \frac{(2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)(2k_1q_1) - (k_1q_1^2 + k_2^2q_2^2)(4q_1 + 2q_2)}{\ell \left[ 2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 \right]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_2} = \frac{(2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)(2k_2q_2) - (k_1q_1^2 + k_2^2q_2^2)(2q_2 + 2q_1)}{\ell \left[ 2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2 \right]^2} = 0$$

Os numeradores, portanto, devem ser nulos:

$$(2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)(2k_1q_1) - (k_1q_1^2 + k_2^2q_2^2)(4q_1 + 2q_2) = 0$$

$$(2q_1^2 + 2q_1q_2 + q_2^2)(2k_2q_2) - (k_1q_1^2 + k_2^2q_2^2)(2q_2 + 2q_1) = 0$$

Rearranjando as expressões obtêm-se:

$$k_1 q_1 = P \ell ( 2 q_1 + q_2 )$$

$$k_2 q_2 = P \ell ( q_2 + q_1 )$$

Mesmo sistema de equações já resolvido anteriormente e portanto resultando o mesmo valor para  $P_{cr}$ .

Pode-se determinar  $P_{cr}$  também a partir de  $\delta^2 V = 0$ .

Sendo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_1} = K_1 - 2 P \ell$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = - P \ell$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_2} = K_2 - P \ell$$

então:

$$\delta^2 V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} - P \ell \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \end{Bmatrix}$$

Impondo-se que  $\delta^2 V = 0$ , ou seja,  $\det [V_{ij}] = 0$ , obtém-se o mesmo valor de  $P_{cr}$  encontrado anteriormente.

Note-se que denominando:

$$[\bar{K}_t] = [\bar{K}_c] + [\bar{K}_g]$$

com:

$$[\bar{K}_c] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\bar{K}_g] = P \ell \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se calcular o valor de  $P_{cr}$  impondo-se que  $\det [\bar{K}_t] = 0$

### 3.3.2 Análise numérica via Método dos Elementos Finitos

A formulação matricial apresentada no caso particular estudado

no ítem 3.3.1.1 pode ser generalizada da seguinte maneira:  
Adotando-se  $\{P\}$  e  $\{q\}$  conjugados energéticos, tem-se que, na configuração de equilíbrio, a partir de  $\delta V/\delta q_i = 0$ , encontra-se:

$$[K] \{q\} = \{P\}$$

Esta expressão, base para o Método dos Elementos Finitos, é útil para a teoria linear. Quando é necessária a utilização de teoria não-linear, em geral, é feita uma análise incremental, a partir da seguinte expressão:

$$\{dP\} = [K_t] \{dq\} \quad ( 3.3.2.1 )$$

onde:

$\{P\}$  é o vetor dos esforços nodais na estrutura.

$\{q\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados da estrutura, conjugados energéticos de  $\{P\}$ .

$[K_t]$  é a matriz de rigidez tangente que pode ser desmembrada em:

$$[K_t] = [K_c] + [K_g] + [K_m]$$

onde:

$[K_c]$  é a matriz de rigidez constitutiva que no caso geral depende das características do material, da geometria dos elementos e das coordenadas nodais após a deformação (PIMENTA(1991)).

$[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica que no caso geral depende dos esforços solicitantes no elemento, da

geometria e das coordenadas nodais após a deformação (PIMENTA (1991)).

$[K_m]$  é a matriz de rigidez geométrica adicional ou matriz de rigidez para correção de momentos (SALEEB (1992)) que, dentro das hipóteses adotadas nesta Dissertação, é nula.

Se respeitadas as hipóteses da teoria simplificada de segunda ordem conforme SOUZA LIMA (1982) e (1984),  $[K_t]$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_t] = [K_0] + [\Delta K_0] + [K_g]$$

sendo:

$[K_0]$  é a matriz de rigidez da teoria linear, dependente das características do material e da geometria dos elementos.

$[\Delta K_0]$  é a matriz de correção de  $[K_0]$  devido a mudança das coordenadas nodais.

$[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica, dependente dos esforços solicitantes e da geometria dos elementos.

Para a determinação do nível de carregamento crítico, baseando-se na eq. 3.3.2.1, deve-se impor a singularidade de  $[K_t]$ , isto é  $\det [K_t] = 0$

Admitindo-se que os deslocamentos sub-críticos sejam de pequena magnitude, pode-se assumir que  $[\Delta K_0] = [0]$  e assim:

$$[K_t] = [K_0] + [K_g]$$

Admitindo-se ainda que todos os carregamentos creçam

monotonicamente associados a um parâmetro  $\lambda$ , pode-se escrever:

$$[K_t] = [K_0] + \lambda [K_g^*]$$

Assim para a determinação do nível de carregamento deve se impor que:

$$\det \left[ [K_0] + \lambda [K_g^*] \right] = 0$$

tratando-se portanto de um problema de valores próprios onde o menor autovalor é o  $\lambda_{cr}$  e  $\{P\}_{cr} = \lambda_{cr} \{P\}$

Em algumas situações estruturais com poucos graus de liberdade, a determinação do nível de carregamento crítico se simplifica quando se adota  $\{P\}$  e  $\{q\}$  associados, porém, não conjugados energeticamente, como é o caso do exemplo de aplicação apresentado, no ítem 3.3.1.1.

Nesses casos pode-se, por simplicidade, adotar uma matriz tangente  $[\bar{K}_t]$  igual a  $[V_{,ij}]$  diferente da  $[K_t]$  citada neste ítem, e impor-se:

$$\det [\bar{K}_t] = 0$$

### 3.3.3 Critérios adotados nesta Dissertação

Neste trabalho adotar-se-á que  $V = V_0 + \Delta V$ , onde:

$V$  é a energia potencial total.

$V_0$  é a energia potencial inicial e que se manterá constante ( $\delta V_0 = 0$ ) após a ocorrência da flambagem

$\Delta V$  é a energia potencial adicional.

A equação geral para cálculo do momento crítico (ítem 4.3) será determinada a partir de  $\Delta V = 0$ , seguida de minimização da solução, e a dedução das equações diferenciais que governam o fenômeno da flambagem lateral será feita (ítem 5.1.2) a partir de  $\delta V = \delta V_0 + \delta(\Delta V) = \delta(\Delta V) = 0$ .

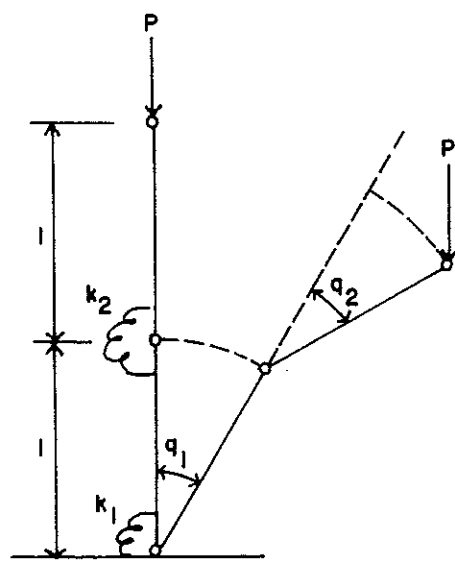
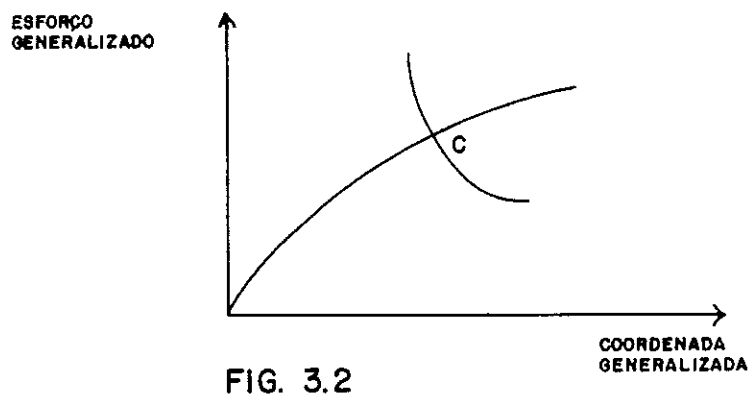
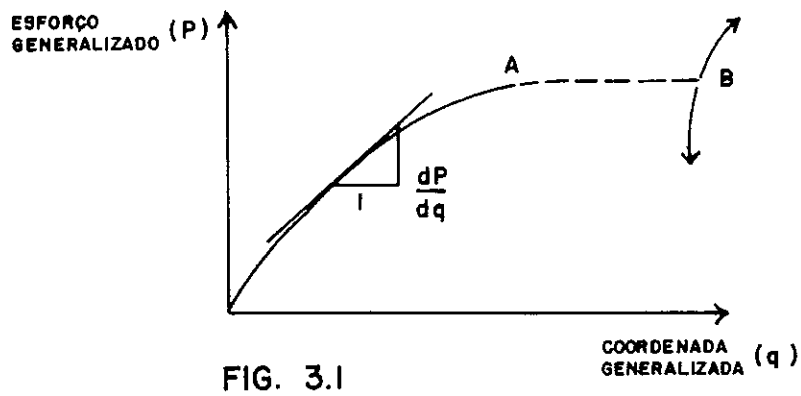


FIG. 3.3



#### 4 DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO DE VIGAS COM SEÇÃO MONOSSIMÉTRICA

##### 4.1 DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE OS DESLOCAMENTOS ADICIONAIS ASSOCIADOS À CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO PÓS-CRÍTICO

Uma viga submetida a carregamentos superiores àquele denominado crítico possui duas posições de equilíbrio: uma, baseada na teoria linear, instável, simplesmente caracterizada pelo aumento dos deslocamentos sub-críticos, mantendo direção e sentido; outra, baseada na teoria não-linear, estável, com deslocamentos adicionais associados à configuração de equilíbrio pós-crítico provenientes de flexão adicional no mesmo plano da flexão sub-crítica, flexão no plano perpendicular ao anterior, torção e empenamento (ver fig. 4.1).

Os deslocamentos determinados a partir da teoria linear serão denominados deslocamentos iniciais e a diferença entre os deslocamentos determinados pela teoria não linear e os iniciais serão denominados deslocamentos adicionais (ver fig. 4.2).

MASUR; MILBRADT (1957), determinaram a equação diferencial que correlaciona os deslocamentos adicionais .

Será apresentada a seguir a dedução desta equação, porém de forma mais completa e partindo de hipóteses mais claras do que as empregadas em MASUR (1957).

### Hipóteses adotadas:

- Seção monossimétrica, formada de paredes delgadas, e com momento de inércia em relação ao eixo de simetria, suficientemente pequeno, se comparado com o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao eixo de simetria, de tal forma que se possa considerar  $\ast (I_y / I_x)$  desprezível em relação à unidade.
- Material elástico-linear no diagrama tensão nominal (de Biot) e alongamento linear.
- Deslocamentos suficientemente pequenos para permitir a decomposição do deslocamento total em deslocamentos parciais de translação e rotação.
- Hipótese de Navier, isto é, as seções planas permanecem planas por efeito da deformação por flexão (desconsidera-se o efeito do cisalhamento).
- Os esforços solicitantes anteriores à ocorrência da flambagem são determinados desconsiderando-se os efeitos dos deslocamentos da viga.
- Todas as seções empenam da mesma forma, caracterizada pela função empenamento ( $\psi$ ) da torção uniforme. O valor do deslocamento devido ao empenamento é proporcional à rotação específica ( $\theta'$ ). Este deslocamento será levado em conta na determinação da deformação, porém será considerado desprezível para o cálculo dos esforços, aplicados à seção, na configuração pós-flambagem.
- Teoria de segunda ordem, aplicada aos deslocamentos e suas

\* favoravelmente em segurança

derivadas, preliminarmente considerando pequenas e de ordem  $\delta$  as rotações iniciais e adicionais e de ordem  $\delta^2$  as respectivas deformações, sendo desprezados os termos de ordem  $\delta^3$  (ou os termos de ordem  $\delta^2$  quando multiplicados por deslocamentos), em relação aos de menor ordem. As funções trigonométricas referentes às rotações serão expandidas em série de Taylor e truncadas nos termos de segunda ordem.

-Esta Dissertação não abrangerá o caso de momentos externos aplicados a pontos isentos de travamentos que impeçam a rotação por torção e o deslocamento lateral.

Baseando-se nestas hipóteses serão previamente determinados os deslocamentos totais de um ponto genérico em relação ao deslocamento do centro de torção e, posteriormente, considerando-se a compatibilidade entre deformação e deslocamentos e o equilíbrio dos esforços, serão deduzidas as equações diferenciais que correlacionam os deslocamentos adicionais.

#### 4.1.1 Deslocamentos devidos à torção com empenamento

Da fig. 4.3 tem-se:

-Deslocamentos na direção x:

$$\begin{aligned} -\bar{u}_{p\theta} &= (CP) \cos \alpha - (CP') \cos (\theta + \alpha) = \\ &= (CP) \cos \alpha - (CP') (\cos \theta \cos \alpha - \text{sen } \theta \text{ sen } \alpha) \end{aligned}$$

Considerando-se que:

$$\begin{aligned} (CP') \cos \alpha &= (CP) \cos \alpha = x \\ (CP') \text{ sen } \alpha &= (CP) \text{ sen } \alpha = y - y_c \end{aligned}$$

tem-se:

$$-\bar{u}_{p\theta} = x - x \cos \theta + (y - y_c) \text{ sen } \theta$$

Rearranjando-se:

$$\bar{u}_{p\theta} = x (\cos \theta - 1) - (y - y_c) \text{ sen } \theta$$

Expandindo-se as funções trigonométricas em série de Taylor e truncando-as nos termos de segunda ordem, isto é:

$$\text{sen } \theta = \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

vem :

$$\bar{u}_{p\theta} = -\frac{x \theta^2}{2} - (y - y_c) \theta \quad (4.1.1.1)$$

-Deslocamento na direção y:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{p\theta} &= (CP') \operatorname{sen} (\theta + \alpha) - (CP) \operatorname{sen} \alpha = \\ &= (CP') (\operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \cos \theta \operatorname{sen} \alpha) - (CP) \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}$$

Com as mesmas considerações anteriores tem-se:

$$\bar{v}_{p\theta} = x \operatorname{sen} \theta + (y - y_c) \cos \theta - (y - y_c)$$

Expandindo-se as funções trigonométricas e rearranjando resulta:

$$\bar{v}_{p\theta} = x \theta - (y - y_c) \frac{\theta^2}{2} \quad (4.1.1.2)$$

-Deslocamento na direção z:

De TIMOSHENKO; GERE(1961) tem-se:

$$\bar{w}_{p\theta} = \psi \theta' \quad (4.1.1.3)$$

#### 4.1.2 Deslocamentos devidos à flexão no plano perpendicular ao eixo x

A fig. 4.4 representa o movimento da seção desde a situação inicial (acrescentando-se, por simplicidade, os deslocamentos devidos a torção com empenamento) até a situação final.

Da fig 4.4 tem-se:

-Deslocamento na direção y:

$$\bar{v}_{pX} = \bar{v}_x - (CP'_y) + (CP'_y) \cos \bar{\beta} - (P'_y P'') \sin \bar{\beta}$$

Da fig. 4.3 tem-se:

$$(CP'_y) = (CP') \sin (\theta + \alpha) = x \sin \theta + (Y - Y_c) \cos \theta$$

e

$$(P'_y P'') = -\psi \theta'$$

Da fig. 4.5 tem-se:

$$\operatorname{tg} \bar{\beta} = \frac{d\bar{v}}{dz + d\bar{w}} = \frac{\bar{v}'}{1 + \bar{w}'}$$

portanto:

$$\cos \bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}} = 1 - \frac{\bar{v}'^2}{2}$$

e

$$\operatorname{sen} \bar{\beta} = \frac{\operatorname{tg} \bar{\beta}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{\beta}}} = \bar{v}' \left( 1 - \bar{w}' + \frac{\bar{v}'^2}{2} \right) = \bar{v}'$$

Na aproximação anterior foi admitido que  $\bar{w}' = w'_0 + w'$  é de ordem  $\delta^2$ . Esta hipótese pode ser confirmada ao analisar-se as

expressões de  $w'_0$  e  $w'$  (eqs. 4.1.6.1.1 e 4.1.6.1.2 respectivamente) cujas parcelas representam rotações ao quadrado e deformações que por hipótese são de ordem  $\delta^2$ .

Efetuando-se as substituições, obtém-se :

$$\bar{v}_{px} = \bar{v}_x + \left[ x \theta + (y - y_c) \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \left( - \frac{\bar{v}'^2}{2} \right) + \psi \theta' \bar{v}'$$

Eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$  e também o termo  $x \theta \bar{v}'^2$ , considerados desprezíveis, por hipótese, em relação aos de menor ordem, resulta:

$$\bar{v}_{px} = \bar{v}_x - (y - y_c) \frac{\bar{v}'^2}{2} + \psi \theta' \bar{v}'$$

( 4.1.2.1 )

NOTA: Na sequência deste trabalho os termos de ordem  $\delta^2$  que aparecerem multiplicados por deslocamentos serão, por simplicidade, identificados como de ordem  $\delta^3$ .

-Deslocamento na direção z:

$$\bar{w}_{px} = \bar{w}_x + (P'_y P''_y) - (C P'_y) \text{ sen } \bar{\beta} - (P'_y P''_y) \text{ cos } \bar{\beta}$$

Fazendo-se substituições análogas às anteriores vem:

$$\bar{w}_{px} = \bar{w}_x - \left[ x \theta + (y - y_c) \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \bar{v}' - \psi \theta' \left( \frac{\bar{v}'^2}{2} \right)$$

Eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$  e rearranjando a expressão, tem-se:

$$\bar{w}_{px} = \bar{w}_x - \bar{v}' \left[ x \theta + (y - y_c) \right] \quad (4.1.2.2)$$

#### 4.1.3 Deslocamentos devidos à flexão no plano perpendicular ao eixo y

Analogamente ao item 4.1.2 tem-se:

-Deslocamento na direção x:

$$\bar{u}_{py} = \bar{u}_y - (CP'_x) + (CP'_x) \cos \bar{\gamma} - (P'_x P''_x) \text{sen } \bar{\gamma}$$

Considerando-se na expressão anterior:

$$(CP'_x) = (CP') \cos (\theta + \alpha) = x \cos \theta - (y - y_c) \text{sen } \theta$$

$$(P'_x P''_x) = -\psi \theta'$$

$$\text{tg } \bar{\gamma} = \frac{\bar{u}'}{1 + \bar{w}'}$$

$$\cos \bar{\gamma} = 1 - \frac{\bar{u}'^2}{2}$$

$$\text{sen } \bar{\gamma} = \bar{u}'$$

resulta:



$$\bar{u}_{py} = \bar{u}_y + \left[ x \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) - (y - y_c) \theta \right] \left( -\frac{\bar{u}'^2}{2} \right) + \psi \theta' \bar{u}'$$

Eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$ , resulta:

$$\bar{u}_{py} = \bar{u}_y - x \frac{\bar{u}'}{2} + \psi \theta' \bar{u}' \quad (4.1.3.1)$$

-Deslocamento na direção z:

$$\bar{w}_{py} = \bar{w}_y + (P'_x P'') - (CP'_x) \text{ sen } \gamma - (P'_x P'') \text{ cos } \gamma$$

Efetuando-se substituições análogas às anteriores, tem-se:

$$\bar{w}_{py} = \bar{w}_y - \left[ x \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) - (y - y_c) \theta \right] \bar{u}' - \psi \theta' \frac{\bar{u}'^2}{2}$$

Eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$ , resulta:

$$\bar{w}_{py} = \bar{w}_y - \bar{u}' \left[ x - (y - y_c) \theta \right] \quad (4.1.3.2)$$

#### 4.1.4 Deslocamentos totais

-Deslocamento na direção x:

$$\bar{u}_p = \bar{u}_{p\theta} + \bar{u}_{py}$$

Das eqs. 4.1.1.1 e 4.1.3.1, tem-se:

$$\bar{u}_p = \bar{u} - \frac{x \theta^2}{2} - (y - y_c) \theta - \frac{x \bar{u}'^2}{2} + \psi \theta' \bar{u}'$$

ou

$$\bar{u}_p = \bar{u} - x \left( \frac{\theta^2}{2} + \frac{\bar{u}'^2}{2} \right) - (y - y_c) \theta + \psi \theta' \bar{u}'$$

( 4.1.4.1. )

-Deslocamento na direção y:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_{p\theta} + \bar{v}_{pX}$$

Das eqs. 4.1.1.2 e 4.1.2.1, tem-se:

$$\bar{v}_p = \bar{v} + x \theta - (y - y_c) \frac{\theta^2}{2} - (y - y_c) \frac{\bar{v}'^2}{2} + \psi \theta' \bar{v}'$$

ou

$$\bar{v}_p = \bar{v} + x \theta - (y - y_c) \left( \frac{\theta^2}{2} + \frac{\bar{v}'^2}{2} \right) + \psi \theta' \bar{v}'$$

( 4.1.4.2 )

-Deslocamento na direção z:

$$\bar{w}_p = \bar{w}_{p\theta} + \bar{w}_{pX} + \bar{w}_{pY}$$

Das eqs. 4.1.1.3, 4.1.2.2 e 4.1.3.2, tem-se:

$$\bar{w}_p = \bar{w} - \bar{v}' \left[ x \theta + (y - y_c) \right] - \bar{u}' \left[ x - (y - y_c) \theta \right] + \psi \theta'$$

( 4.1.4.3 )

#### 4.1.5 Compatibilidade entre deformação e deslocamentos

Da fig. 4.6 tem-se:

$$[dz (1 + \bar{\epsilon}_p)]^2 = (dz + d\bar{w}_p)^2 + (d\bar{v}_p)^2 + (d\bar{u}_p)^2$$

Dividindo-se todos os termos por dz resulta:

$$(1 + \bar{\epsilon}_p)^2 = (1 + \bar{w}'_p)^2 + (\bar{v}'_p)^2 + (\bar{u}'_p)^2$$

$$1 + \bar{\epsilon}_p = \sqrt{1 + 2\bar{w}'_p + \bar{w}'_p{}^2 + \bar{v}'_p{}^2 + \bar{u}'_p{}^2}$$

Lembrando-se a expansão em série de Taylor :

$$\sqrt{1 + \Delta} = 1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta^3}{16} \dots$$

e fazendo-se

$$\Delta = 2\bar{w}'_p + \bar{w}'_p{}^2 + \bar{v}'_p{}^2 + \bar{u}'_p{}^2$$

resulta:

$$1 + \bar{\epsilon}_p = 1 + \bar{w}'_p + \frac{1}{2} (\bar{w}'_p{}^2 + \bar{v}'_p{}^2 + \bar{u}'_p{}^2) - \frac{1}{8} (4 \bar{w}'_p{}^2) + O(\delta^3)$$

Eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$ , tem-se:

$$1 + \bar{\varepsilon}_p = 1 + \bar{w}'_p + \frac{1}{2} (\bar{u}'_p{}^2 + \bar{v}'_p{}^2)$$

ou seja:

$$\bar{\varepsilon}_p = \bar{w}'_p + \frac{1}{2} (\bar{u}'_p{}^2 + \bar{v}'_p{}^2) \quad (4.1.5.1)$$

Da eq. 4.1.4.1 tem-se:

$$\bar{u}'_p = \bar{u}' - x \theta \theta' - x \bar{u}' \bar{u}'' - (y - y_c) \theta' + \psi (\theta' \bar{u}'' + \theta'' \bar{u})$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'_p{}^2 &= \bar{u}'^2 + (y - y_c)^2 \theta'^2 - 2 (y - y_c) \bar{u}' \theta' + \\ &+ 2 x (y - y_c) \theta' (\theta \theta' + \bar{u}' \bar{u}'') - \\ &- 2 \psi (y - y_c) \theta' (\theta' \bar{u}'' + \theta'' \bar{u}') \end{aligned} \quad (4.1.5.2)^*$$

Da eq. 4.1.4.2 tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_p &= \bar{v}' + x \theta' - (y - y_c) \bar{v}' \bar{v}'' - (y - y_c) \theta \theta' + \\ &+ \psi (\theta' \bar{v}'' + \theta'' \bar{v}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}'_p{}^2 &= \bar{v}'^2 + x^2 \theta'^2 + 2 x \bar{v}' \theta' - 2 x (y - y_c) \theta' (\theta \theta' + \bar{v}' \bar{v}'') + \\ &+ 2 x \psi \theta' (\theta' \bar{v}'' + \theta'' \bar{v}') \end{aligned} \quad (4.1.5.3)^*$$

\* Já estão excluídos os termos onde  $x$ ,  $(y - y_c)$  e  $\psi$

apareceriam multiplicados por termos de ordem igual ou superior a  $\delta^3$ , que seriam desprezados quando comparados aos termos de ordem inferior constantes da eq. 4.1.5.5.

\* As duas últimas parcelas destas expressões também podem ser desprezadas, por serem de ordem  $\delta^3$ , pois como por hipótese todas as rotações e deformações são de ordem igual ou superior a  $\delta$  e  $\delta^2$  respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} (y - y_c) \theta' \text{ e } x \theta' &= O(\delta) \\ x (\theta \theta' + \bar{u}' \bar{u}'') \text{ e } \psi (\theta' \bar{u}'' + \theta'' \bar{u}') &= O(\delta^2) \\ (y - y_c) (\theta \theta' + \bar{v}' \bar{v}'') \text{ e } \psi (\theta' \bar{v}'' + \theta'' \bar{v}') &= O(\delta^2) \end{aligned}$$

Da eq. 4.1.4.3 tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{w}'_p &= \bar{w}' - x (\theta \bar{v}'' + \theta' \bar{v}' + \bar{u}'') + \\ &+ (y - y_c) (\theta \bar{u}'' + \theta' \bar{u}' - \bar{v}'') + \psi \theta'' \end{aligned} \quad (4.1.5.4)$$

Substituindo-se as eqs. 4.1.5.2, 4.1.5.3 e 4.1.5.4 na eq. 4.1.5.1, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_p &= \bar{w}' + \frac{1}{2} (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2) + \frac{1}{2} [(y - y_c)^2 + x^2] \theta'^2 - \\ &- x [\theta \bar{v}'' + \bar{u}'' ] + (y - y_c) [\theta \bar{u}'' - \bar{v}''] + \psi \theta'' \end{aligned} \quad (4.1.5.5)$$

Lembrando-se que :

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_{p0} + \varepsilon_p$$

$$\bar{w} = w_0 + w$$

$$\bar{v} = v_0 + v$$

$$\bar{u} = u.$$

Pode-se determinar  $\varepsilon_{p0}$ , anulando-se na eq. 4.1.5.5 as parcelas  $u, v, w$  de  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  bem como a rotação  $\theta$ , de modo que:

$$\varepsilon_{p0} = w'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 + (y - y_c) (-v_0'') \quad (4.1.5.6)$$

A deformação adicional em um ponto genérico pode ser calculada a a partir dos valores de  $\bar{\varepsilon}_p$  e  $\varepsilon_{p0}$  dados pelas eqs. 4.1.5.5 e 4.1.5.6 ou seja:

$$\varepsilon_p = \bar{\varepsilon}_p - \varepsilon_{p0}$$

$$\varepsilon_p = w' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) + \frac{1}{2} [x^2 + (y - y_c)^2] \theta'^2 + v'v'_0 - x (\theta \bar{v}'' + u'') + (y - y_c) (\theta u'' - v'') + \psi \theta''$$

( 4.1.5.7 )

#### 4.1.6 Equilíbrio dos esforços

##### 4.1.6.1 Força normal

Como não há força normal agindo na seção considerada :

$$\int_A \sigma_{p0} dA = E \int_A \varepsilon_{p0} dA = 0$$

$$\int_A \sigma_p dA = E \int_A \varepsilon_p dA = 0$$

Portanto:

$$\int_A \varepsilon_{p0} dA = 0$$

$$\int_A \varepsilon_p dA = 0$$

Considerando-se as eqs. 4.1.5.6 e 4.1.5.7 nas expressões acima e lembrando que:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0$$

e conforme TIMOSHENKO (1961):

$$\int_A \psi dA = 0$$

obtem-se:

$$\int_A \varepsilon_{p0} dA = \int_A \left[ w'_0 + \frac{1}{2} v'_0{}^2 - y_c (-v''_0) \right] dA = 0$$

Como o argumento da integral independe de x e y resulta:

$$\text{-----}$$

$$w'_0 = - \left( \frac{1}{2} v'_0{}^2 + y_c v''_0 \right) \quad ( 4.1.6.1.1 )$$

$$\text{-----}$$

$$\int_A \varepsilon_p \, dA = \int_A \left\{ w' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) + v' v'_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [x^2 + (y - y_c)^2] \theta'^2 - y_c (\theta u'' - v'') \right\} dA = 0$$

Sabendo-se que:

$$\int_A [x^2 + (y - y_c)^2] \, dA = I_{cp} = r_{cp}^2 A$$

sendo  $I_{cp}$  o momento polar de inércia e  $r_{cp}$  o respectivo raio de giração, com polo localizado no centro de torção, e que os outros termos do argumento da integral não dependem de  $x$  e  $y$ , resulta:

$$\left[ w' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) + \frac{r_{cp}^2 \theta'^2}{2} + v' v'_0 - y_c (\theta u'' - v'') \right] A = 0$$

ou seja:

---


$$w' = - \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) - \frac{r_{cp}^2 \theta'^2}{2} - v' v'_0 + y_c (\theta u'' - v'')$$


---

( 4.1.6.1.2 )

Pode-se notar que a partir da eq. 4.1.6.1.1 obtém-se a conhecida expressão da resistência dos materiais (SOUZA LIMA (1959)):

$$w_{cg} = w_0 + y_c v'_0 = - \int_0^{\ell} \frac{v_0'^2}{2} \, dz$$



Considerando-se os valores de  $w'_0$  e  $w'$ , dados pelas eqs. 4.1.6.1.1 e 4.1.6.1.2, nas eqs. 4.1.5.6 e 4.1.5.7, obtêm-se:

$$\varepsilon_{p0} = - y v''_0 \quad ( 4.1.6.1.3 )$$

$$\varepsilon_p = - \frac{r_{cp}^2 \theta'^2}{2} + \frac{1}{2} \left[ x^2 + (y - y_c)^2 \right] \theta'^2 -$$

$$- x (\theta \bar{v}'' + u'') + y (\theta u'' - v'') + \psi \theta''$$

( 4.1.6.1.4 )

#### 4.1.6.2 Momentos fletores

##### 4.1.6.2.1 Direção $\tilde{x}$

Da fig. 4.7 tem-se:

$$M_x = M \cos \gamma \cos \theta + M \sin \gamma \sin \beta \sin \theta$$

Expandindo-se as funções trigonométricas em série de Taylor e truncando-as nos termos de segunda ordem vem:

$$M_x = M \left( 1 - \frac{u'^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = M \left( 1 - \frac{u'^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} \right)$$

Mas como  $M$  já estava aplicado à seção antes de os deslocamentos adicionais surgirem, conclui-se que a variação do momento sobre o eixo  $x$  após a flambagem vale:

$$M_x - M = - M \left( \frac{u'^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right)$$

Portanto:

$$\int_A \sigma_p y \, dA = E \int_A \varepsilon_p y \, dA = -M \left( \frac{u'^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right)$$

Considerando na expressão anterior o valor de  $\varepsilon_p$  dado pela eq. 4.1.6.1.4 e lembrando que:

$$\int_A y \, dA = \int_A Y^3 \, dA = \int_A x y \, dA = 0$$

$$\int_A y^2 \, dA = I_x$$

e conforme TIMOSHENKO (1961):

$$\int_A \psi y \, dA = 0$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_A \varepsilon_p y \, dA = \\ & = \int_A \left\{ \frac{1}{2} \left[ y x^2 + y (Y^2 - 2 y y_c) \right] \theta'^2 + y^2 (\theta u'' - v'') \right\} dA = \\ & = -\frac{M}{E} \left( \frac{u'^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Considerando-se na expressão anterior o valor de M conforme PIMENTA; MAZZILLI (1986), ou seja:  $M = -EI_x \beta'_0$ , dividindo-se ambos os termos por  $I_x$ , e efetuando-se a seguinte substituição:

$$k = y_c - \frac{1}{2 I_x} \int_A (x^2 + Y^2) y \, dA$$

resulta:

$$v'' = u'' \theta - k \theta'^2 + O(\delta^3)$$

Finalmente, eliminando-se os termos de ordem  $\delta^3$ , obtém-se:

$$\boxed{v'' = u'' \theta - k \theta'^2} \quad (4.1.6.2.1)$$

#### 4.1.6.2.2 Direção $y$

Da fig. 4.7 tem-se:

$$M_y = M \cos \gamma \sin \theta - M \sin \gamma \sin \beta \cos \theta$$

Expandindo-se as funções trigonométricas em série de Taylor e admitindo-se que  $\sin \beta = v' = 0 (u'\theta)$ , resulta:

$$\boxed{M_y = M \theta} \quad (4.1.6.2.2.1)$$

Considerando o valor de  $\varepsilon_p$  dado pela eq. 4.1.6.1.4 e lembrando que:

$$\int_A x \, dA = \int_A x^3 \, dA = \int_A xy \, dA = \int_A xy^2 \, dA = 0$$

$$\int_A x^2 \, dA = I_y$$

e conforme TIMOSHENKO (1961):

$$\int_A \psi x \, dA = 0$$

obtém-se:

$$M_Y = \int_A \sigma_p x \, dA = E \int_A \varepsilon_p x \, dA = -EI_y (\theta v''_0 + \theta v'' + u'')$$

Mas conforme a eq. 4.1.6.2.2.1 :

$$M_y = M \theta$$

Portanto:

$$M \theta = - EI_x \beta'_0 \theta = - EI_y u'' - EI_y \theta (v''_0 + v'')$$

Considerando-se  $(I_y/I_x)$  como sendo de ordem  $\delta$ , pois por hipótese é desprezível em relação à unidade, pode-se eliminar a última parcela da expressão acima resultando:

$$\boxed{M \theta = - E I_y u''} \quad ( 4.1.6.2.2.2 )$$

#### 4.2 FUNCIONAL DA ENERGIA POTENCIAL ADICIONAL

A energia potencial adicional ( $\Delta V$ ), é determinada a partir da energia de deformação adicional ( $\Delta U$ ) menos a variação de energia potencial das forças externas ( $\Delta W$ ), durante o processo de flambagem.

$$\Delta V = \Delta U - \Delta W$$

##### 4.2.1 Energia de deformação adicional

A energia de deformação adicional ou energia potencial adicional dos esforços internos, desconsiderando-se quaisquer efeitos provenientes de eventuais acoplamentos entre energias devidas à distorção por torção e aos alongamentos, é dada por:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

onde:

$\Delta U_1$  é a parcela relativa ao alongamento, que para materiais elástico-lineares, é dada por:

$$\Delta U_1 = \int_V \left( \sigma_{po} \varepsilon_p + \frac{\sigma_p \varepsilon_p}{2} \right) dV = E \int_V \left( \varepsilon_{po} \varepsilon_p + \frac{\varepsilon_p^2}{2} \right) dV$$

$\Delta U_2$  é a parcela relativa à distorção devida à torção, que para materiais elástico-lineares, é dada por:

$$\Delta U_2 = \int_V \frac{\tau \gamma}{2} dV$$

onde:

$\tau$  - tensão de cisalhamento devido à torção

$\gamma$  - distorção devida à torção

#### 4.2.1.1 Energia de deformação adicional devida ao alongamento

Considerando os valores de  $\varepsilon_{po}$  e  $\varepsilon_p$ , fornecidos pelas eqs. 4.1.6.1.3 e 4.1.6.1.4, para calcular a primeira parcela de  $\Delta U_1$ , resulta:

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon_{po} \varepsilon_p dV &= \int_V y (-v''_o) \varepsilon_p dV = \\ &= \int_V y (-v''_o) \left\{ -\frac{r_{cp} \theta'^2}{2} + \frac{1}{2} \left[ x^2 + (y - y_c)^2 \right] \theta'^2 - \right. \\ &\quad \left. - x (\theta \bar{v}'' + u'') + y (\theta u'' - v'') + \psi \theta \right\} dV \end{aligned}$$

Lembrando as considerações feitas no item 4.1.6.2.1, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \varepsilon_{po} \varepsilon_p dV = \\
 & = \int_0^{\ell} (-v''_0) \left\{ I_x \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{I_x} \int_A y (x^2 + y^2) dA - y_c \right] \theta'^2 + \right. \\
 & \quad \left. + I_x (\theta u'' - v'') \right\} dz = \\
 & = I_x \int_0^{\ell} (-v''_0) (\theta u'' - v'' - k \theta'^2) dz = 0
 \end{aligned}$$

Assim, obtém-se:

$$\int_V \sigma_{po} \varepsilon_p dV = 0$$

Considerando os valores de  $\varepsilon_p$  e  $v''$ , fornecidos pelas eqs. 4.1.6.1.4 e 4.1.6.2.1.1, para calcular a segunda parcela de  $\Delta U_1$  e adotando-se:

$$L^2 = \frac{1}{2} \left[ -r_{cp}^2 + x^2 + (y - y_c)^2 + 2k y \right]$$

resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_p^2 dV = \\
 & = \frac{E}{2} \int_V \left[ x^2 u''^2 + \psi^2 \theta''^2 + L^4 \theta'^4 - \right. \\
 & \quad \left. - 2 (L^2 x \theta'^2 u'' + \psi x u'' \theta'' - L^2 \psi \theta'^2 \theta'') \right] dV =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{2} \int_V \left[ x^2 u''^2 + \psi^2 \theta''^2 + L^4 \theta'^4 + \psi (x^2 + y^2) \theta'^2 \theta'' \right] dV$$

Desconsiderando-se as duas últimas parcelas em relação às duas primeiras, por serem de ordem superior a estas, o que equivale a supor que as derivadas dos deslocamentos devidos à torção são da mesma ordem de grandeza e lembrando-se que conforme TIMOSHENKO (1961):

$$\int_A \psi^2 dA = C_w$$

tem-se:

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u''^2 + EC_w \theta''^2) dz \quad (4.2.1.1.1)$$

#### 4.2.1.2 Energia de deformação adicional devida à distorção por torção

$$\Delta U_2 = \int_V \frac{\tau \gamma}{2} dV$$

Sabendo-se que  $\tau = G \gamma$  tem-se:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV = \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dV$$

onde:  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são as componentes de  $\tau$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Utilizando-se a função auxiliar  $\phi$ , introduzida por Prandtl, de tal forma que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\tau_{yz} = -G \gamma_{yz}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

resulta:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2G} \int_V \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dV$$

ou

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2G} \int_0^l \left[ \int_A \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dA + \int_A \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dA \right] dz \quad (4.2.1.2.1)$$

Lembrando o Teorema de Green:

$$\oint \left[ P(x,y) dx + Q(x,y) dy \right] = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

e adotando-se:

$$Q(x,y) = 0$$

e

$$P(x,y) = u(x,y) v(x,y)$$

obtem-se:

$$\oint u v dx = - \iint \left[ \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} u \right] dx dy$$



Rearranjando tem-se:

$$\int_A v \frac{\partial u}{\partial y} dA = - \oint u v dx - \int_A \frac{\partial v}{\partial y} u dA$$

Adotando-se ainda:

$$u(x, y) = \phi(x, y)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Sendo  $\phi$  a função de Prandtl ( $\phi_c \rightarrow$  valor no contorno) resulta:

$$\int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dA = - \oint \frac{\partial \phi}{\partial y} \phi_c dx - \int_A \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \phi dA$$

Analogamente pode-se obter:

$$\int_A u \frac{\partial v}{\partial x} dA = \oint u v dy - \int_A v \frac{\partial u}{\partial x} dA$$

Adotando-se:

$$v(x, y) = \phi(x, y)$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial x}$$

resulta:

$$\int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 dA = \oint \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi_c dy - \int_A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \phi dA$$

Assim a eq. 4.2.1.2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta U_2 = - \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \left[ \int_A \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \phi \, dA - \oint \phi_c \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx \right) \right] dz$$

Lembrando que a função de Prandtl ( $\phi$ ) é constante no contorno (TIMOSHENKO (1980)) e aplicando o Teorema de Green à segunda parcela da expressão acima tem-se:

$$\phi_c \oint \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx \right) = \phi_c \int_A \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dA$$

Assim sendo a eq. 4.2.1.2.1 pode ser reescrita da seguinte maneira :

$$\Delta U_2 = - \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \left[ \int_A \phi (\nabla^2 \phi) \, dA - \phi_c \int_A \nabla^2 \phi \, dA \right] dz$$

onde:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = G \left( - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

Sabe-se que, eliminados os termos de ordem  $\delta^3$  (baseando-se nas hipóteses deste trabalho), tem-se:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_{p\theta}}{\partial x} + \frac{\partial u_{p\theta}}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_{p\theta}}{\partial y} + \frac{\partial v_{p\theta}}{\partial x}$$

Portanto:

$$\nabla^2 \phi = G \left( - \frac{\partial^2 v_{p\theta}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_{p\theta}}{\partial y \partial z} \right)$$

A partir da eqs. 4.1.1.1 e 4.1.1.2 tem-se:

$$\nabla^2 \phi = - 2 G \theta'$$

Assim sendo:

$$\Delta U_2 = - \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \left[ \int_A \phi (-2G\theta') dA - \phi_c \int_A (-2G\theta') dA \right] dz$$

ou

$$\Delta U_2 = \int_0^{\ell} \theta' \left[ \int_A \phi dA - \phi_c A \right] dz$$

Aplicando-se o Teorema de Green à integral de  $\phi dA$ , obtém-se:

$$\int_A \phi dA = - \oint \phi_c y dx - \int_A \frac{\partial \phi}{\partial y} y dA$$

e também:

$$\int_A \phi dA = \oint \phi_c x dy - \int_A \frac{\partial \phi}{\partial x} x dA$$

Adicionando-se as duas últimas expressões, resulta:

$$\int_A 2 \phi dA = \phi_c \oint (x dy - y dx) - \int_A \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dA =$$

$$= \phi_c \int_A 2 \, dA - \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x) \, dA = 2 \phi_c A + M_t$$

ou

$$\int_A \phi \, dA = \phi_c A + M_t/2$$

Finalmente tem-se:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2} \int_0^\ell M_t \theta' \, dz$$

Sabendo-se que, na torção uniforme  $M_t = GI_t \theta'$ , resulta:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2} \int_0^\ell G I_t \theta'^2 \, dz \quad (4.2.1.2.2)$$

#### 4.2.1.3 Funcional adotado

Considerando-se que:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

resulta, das eqs. 4.2.1.1.1 e 4.2.1.2.2 :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^\ell (EI_y u''^2 + EC_w \theta''^2 + GI_t \theta'^2) \, dz$$

( 4.2.1.3.1 )

Este funcional para a energia de deformação adicional

é apresentado sem demonstração em TIMOSHENKO (1961), MASUR (1957) e CLARK (1962).

Em BLEICH (1952) (pg. 154, eq. 285), o mesmo funcional é apresentado, apesar de os eixos x e y sofrerem uma rotação de  $\theta$ , em relação aos adotados pelos outros autores o que não afeta significativamente o resultado final, pois o deslocamento "u", sobre o eixo x, conforme Bleich, difere do deslocamento "u", conforme os outros autores, apenas por termos de ordem  $\delta^3$ .

VLASSOV (1962) apesar de não se referir ao funcional  $\Delta U$ , apresenta as equações diferenciais que governam o fenômeno (pg. 441, eqs. 3.1) e estas podem ser perfeitamente associadas, ao funcional apresentado pelos autores citados anteriormente.

#### 4.2.2 Energia potencial adicional dos esforços externos

A energia potencial adicional das esforços externos (vide fig. 4.1) é dada por:

$$\Delta W = \int_0^{\ell} p b dz + \int_0^{\ell} p v dz + \Delta W^* \quad (4.2.2.1)$$

Onde :

$\Delta W^*$  é a energia potencial adicional dos esforços eventualmente existentes nas extremidades do trecho de viga considerado que, admitindo-se impedimento ao deslocamento lateral e à rotação por torção nestas extremidades, vale:

$$\begin{aligned}\Delta W^* &= M(0) \beta(0) - M(\ell) \beta(\ell) - Q(0) v(0) + Q(\ell) v(\ell) = \\ &= \left[ M \beta - Q v \right]_0^\ell\end{aligned}$$

A primeira parcela da eq. 4.2.2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_0^\ell p b dz = \int_0^\ell p (a - a \cos \theta) dz = \int_0^\ell p a \frac{\theta^2}{2} dz \quad (4.2.2.2)$$

sendo  $a$  a distância entre o ponto de aplicação do carregamento e o centro de torção, admitido positivo para carregamentos aplicados acima do centro de torção.

A segunda parcela da eq. 4.2.2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_0^\ell p v dz = - \int_0^\ell M'' v dz$$

Integrando-se por partes duas vezes obtém-se:

$$\begin{aligned}- \int_0^\ell M'' v dz &= - \int_0^\ell M v'' dz - \left[ M' v - M v' \right]_0^\ell = \\ &= - \int_0^\ell M v'' dz - \Delta W^*\end{aligned}$$

Considerando-se na expressão anterior o valor de  $v''$  dado pela eq. 4.1.6.2.1.1, obtém-se:

$$\int_0^{\ell} p v dz = - \int_0^{\ell} M \theta u'' dz + \int_0^{\ell} k M \theta'^2 dz - \Delta W^*$$

( 4.2.2.3 )

Considerando-se as eqs. 4.2.2.2 e 4.2.2.3 na eq. 4.2.2.1 obtém-se:

$$\Delta W = \int_0^{\ell} (p a \frac{\theta^2}{2} - M \theta u'' + k M \theta'^2) dz$$

( 4.2.2.4 )

#### 4.2.3 Energia potencial adicional

Das eqs. 4.2.1.3.1 e 4.2.2.4 resulta:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (EI_y u''^2 + EC_w \theta''^2 + GI_t \theta'^2 + 2 M \theta u'' - 2 k M \theta'^2 - p a \theta^2) dz$$

( 4.2.3.1 )

### 4.3 DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DO MOMENTO CRÍTICO

(CLARK E HILL)

A partir do funcional 4.2.3.1 poder-se-ia calcular, para o caso geral, o momento, denominado crítico, que causa a bifurcação na trajetória de equilíbrio. Observa-se, porém, que neste funcional  $u$ ,  $\theta$ ,  $M$  e  $p$  são funções de  $z$  e  $C_w$  e  $k$  são parâmetros geométricos de difícil determinação precisa. Assim

sendo somente se conhecem soluções particulares para este problema.

CLARK; HILL (1962) determinaram, baseando-se no método de Rayleigh, uma equação geral, inédita, para o cálculo do momento crítico, que, apesar de também apresentar difícil solução, tem um importante interesse didático.

Nesta equação aparecem explicitamente termos que estão associados com a monossimetria ( $k$ ), posição do carregamento ( $a$ ), condições de vínculo ( $K$ ) e tipo de carregamento ( $C_b, C_p, C_k$ ), sendo estes três últimos coeficientes dependentes também do tipo de vinculação. Pelo interesse didático será desenvolvida, a seguir, a dedução dessa equação, porém, de forma mais completa do que a apresentada em CLARK (1962).

Considerando no funcional dado pela eq. 4.2.3.1 as seguintes mudanças de variáveis:

$$M = m(z) \bar{M}$$

onde  $\bar{M}$  é o máximo momento fletor na viga e :

$$Z = z/\ell$$

de modo que:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \theta' \ell$$

$$\frac{d^2\theta}{dZ^2} = \theta'' \ell^2$$

$$\frac{d^2m}{dZ^2} = m'' \ell^2$$



lembrando que

$$p = - M''$$

e que, de acordo com a eq. 4.1.6.2.2.2:

$$u'' = - \frac{M \theta}{EI_y}$$

obtém-se:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ EI_y \left( \frac{m \bar{M} \theta}{EI_y} \right)^2 + \frac{EC_w}{\ell^4} \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 + \frac{GI_t}{\ell^2} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left[ m \bar{M} \theta \left( - \frac{m \bar{M} \theta}{EI_y} \right) - \frac{k m \bar{M}}{\ell^2} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] + \frac{\bar{M}}{\ell^2} \frac{d^2 m}{dz^2} a \theta^2 \right\} dz$$

Para se determinar  $\bar{M} = M_{cr}$  pelo método de Rayleigh, deve-se fazer  $\Delta V = 0$ , de modo que:

$$\Delta V = - \frac{\bar{M}^2 \ell}{2 EI_y} \left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] - \\ - \frac{\bar{M}}{\ell} \left[ k \int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{a}{2} \int_0^1 \frac{d^2 m}{dz^2} \theta^2 dz \right] + \\ + \left[ \frac{EC_w}{2 \ell^3} \int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{GI_t}{2 \ell} \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \right] = 0$$

ou:

$$\frac{\bar{M}^2}{EI_y} \left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] + \frac{\bar{M}}{\ell^2} \left[ 2k \int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz - a \int_0^1 \frac{d^2 m}{dz^2} \theta^2 dz \right] -$$

$$- \frac{EC_w}{\ell^4} \int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{GI_t}{\ell^2} \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz = 0$$

Fazendo-se :

$$\alpha_1 = \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \left( \frac{d^2 m}{dz^2} \right)^2 \theta^2 dz$$

$$\alpha_3 = \int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz$$

$$\alpha_4 = \int_0^1 m^2 \theta^2 dz$$

$$\alpha_5 = \int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz$$

obtem-se:

$$\frac{\bar{M}^2}{EI_y} \alpha_4 + \frac{\bar{M}}{\ell^2} (2k \alpha_3 - a \alpha_2) - \frac{EC_w}{\ell^4} \alpha_5 - \frac{GI_t}{\ell^2} \alpha_1 = 0$$

Resolvendo-se a equação do segundo grau em  $\bar{M}$  vem:

$$\Delta = \left( \frac{2 k \alpha_3 - a \alpha_2}{\ell^2} \right)^2 + \frac{4}{EI_y} \alpha_4 \left( \frac{EC_w}{\ell^4} \alpha_5 + \frac{GI_t}{\ell^2} \alpha_1 \right)$$

Rearranjando-se:

$$\Delta = \frac{4 \alpha_4 \alpha}{\ell^4} \left\{ \left[ a \left( \frac{\alpha_2}{2 \sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right) - k \left( \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right) \right]^2 + \frac{C_w}{I_y} \left[ 1 + \frac{GI_t}{\pi^2 EC_w} \left( \pi^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_5} \ell^2 \right) \right] \right\}$$

Denominando-se o termo entre chaves de  $\lambda^2$  tem-se:

$$\bar{M} = \frac{a \alpha_2 - 2 k \alpha_3}{\frac{2 \alpha_4}{EI_y} \ell^2} + \frac{EI_y}{\ell^2} \frac{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}}{\alpha_4} \lambda$$

Rearranjando-se resulta:

$$\bar{M} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \frac{\pi^2 EI_y}{\alpha_5 \pi^2 \ell^2} \left\{ a \left[ \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right] - k \left[ \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right] + \sqrt{\left[ a \left( \frac{\alpha_2}{2 \sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right) - k \left( \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}} \right) \right]^2 + \frac{C_w}{I_y} \left[ 1 + \frac{GI_t}{\pi^2 EC_w} \left( \pi^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_5} \ell^2 \right) \right]} \right\}$$

Fazendo-se:

$$C_b = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}}$$

$$C_p = \frac{-\alpha_2}{2 \sqrt{\alpha_4 \alpha_5}}$$

$$C_k = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_4 \alpha_5}}$$

$$K^2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_5} \pi^2$$

finalmente tem-se para  $\bar{M} = M_{cr}$ :

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi^2 EI_y}{(K\ell)^2} \left[ - (C_p a + C_k k) + \sqrt{(C_p a + C_k k)^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{(K\ell)^2}{\pi^2} \right)} \right]$$

( 4.3.1 )

onde:

$$C_b = \frac{\left[ \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \right]}{\sqrt{\left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \right]}}$$

( 4.3.2 )

$$C_p = -\frac{1}{2} \frac{\left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2 m}{dz^2} \right) \theta^2 dz \right]}{\sqrt{\left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz \right]}}$$

( 4.3.3 )

$$C_k = \frac{\left[ \int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz \right]}{\sqrt{\left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz \right]}}$$

( 4.3.4 )

$$K^2 = \pi^2 \frac{\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^1 \left( \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right)^2 dz}$$

( 4.3.5 )

NOTA: O sinal de "a" e de "k" ("k" tem o mesmo sinal de "y<sub>c</sub>") devem ser compatíveis com a orientação adotada neste capítulo, isto é:

carregamento aplicado acima do centro de torção: a > 0

carregamento aplicado abaixo do centro de torção: a < 0

mesa inferior maior: y<sub>c</sub> > 0

mesa superior maior: y<sub>c</sub> < 0

Grande número de bibliografias, inclusive CLARK (1962), adotam outras orientações, porém a sugerida nesta Dissertação é a mais geral.

Como se pode notar, o problema, ainda não está resolvido pois para dar sequência ao método de Rayleigh dever-se-iam assumir funções  $\theta(z)$  e  $m(z)$  e posteriormente minimizar o resultado encontrado, o que é bastante trabalhoso.

Várias soluções numéricas foram estudadas por vários autores e baseando-se em diversas delas CLARK concluiu que os coeficientes da eq. 4.3.1 são, para efeitos práticos, dependentes tão somente do tipo de carregamento e das condições de vínculo.

Os próximos itens serão dedicados à apresentação de algumas destas soluções, constatando a conclusão de CLARK para a maioria dos casos estudados exceto para vigas em balanço.

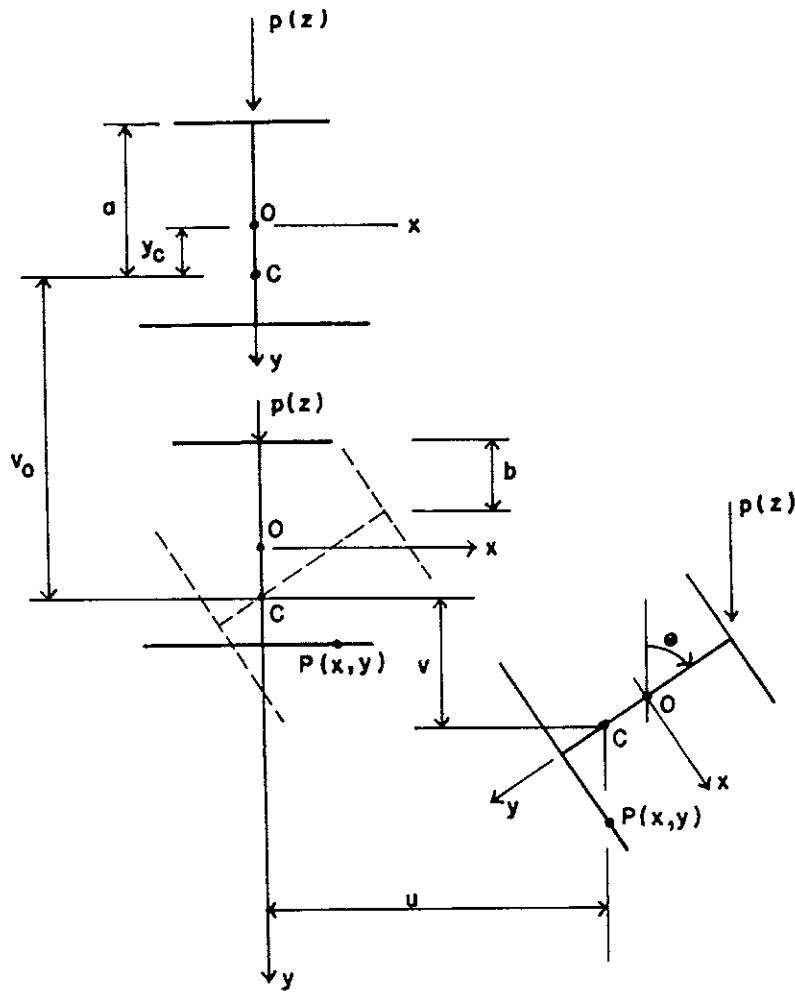


FIG. 4.1

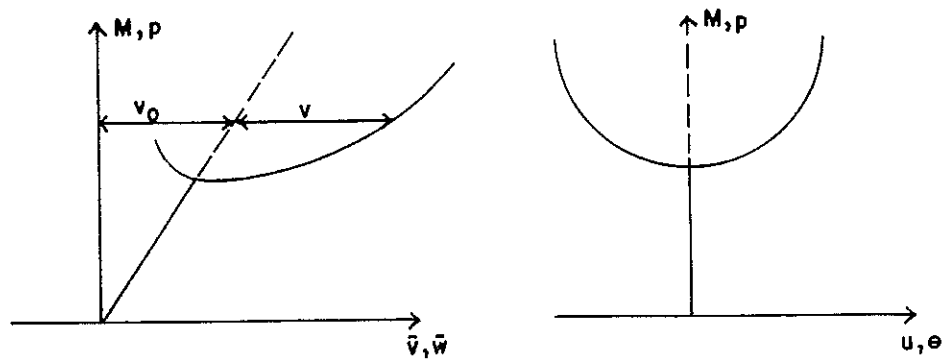


FIG. 4.2

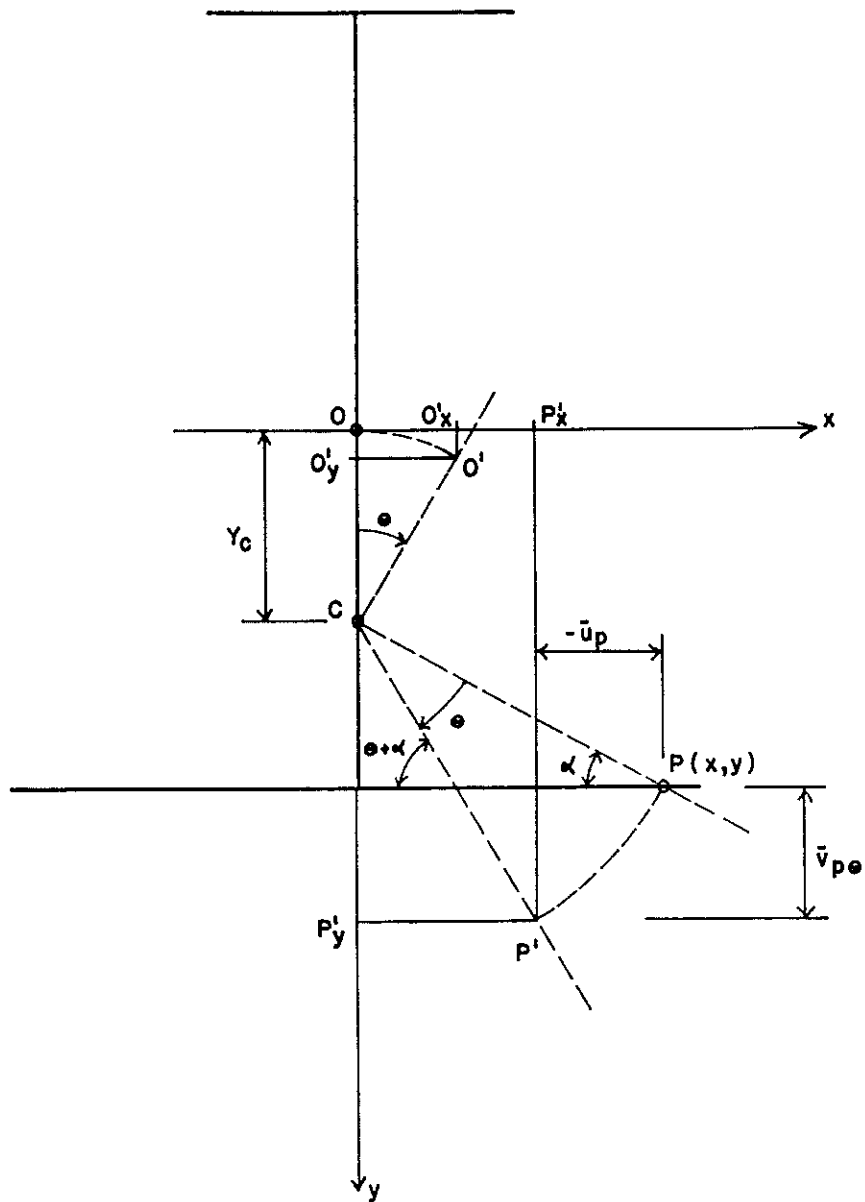


FIG. 4.3



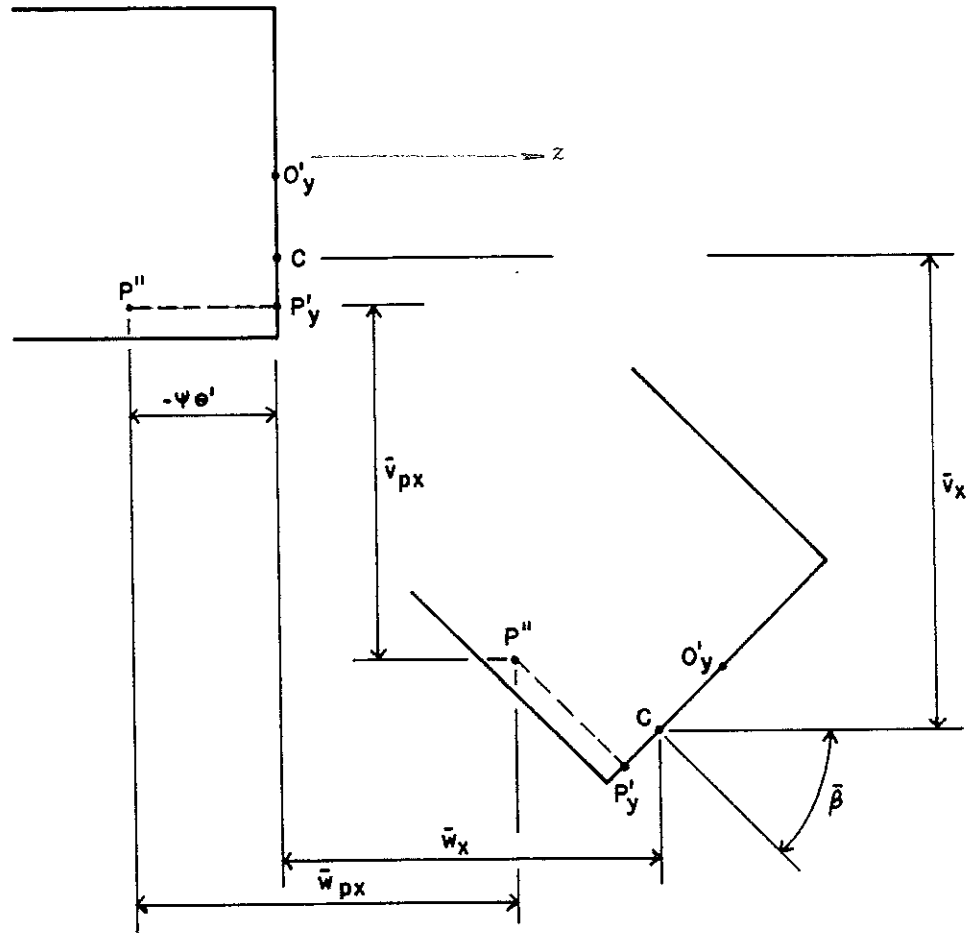


FIG. 4.4

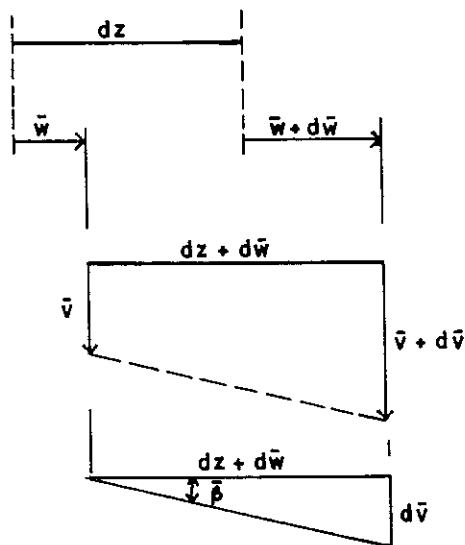


FIG. 4.5

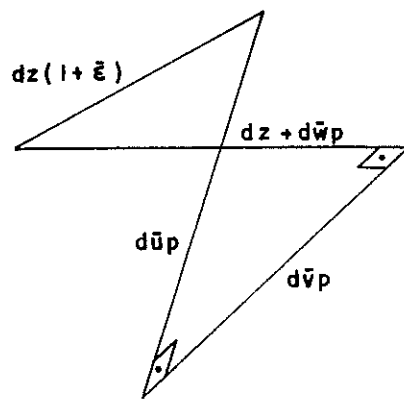


FIG. 4.6

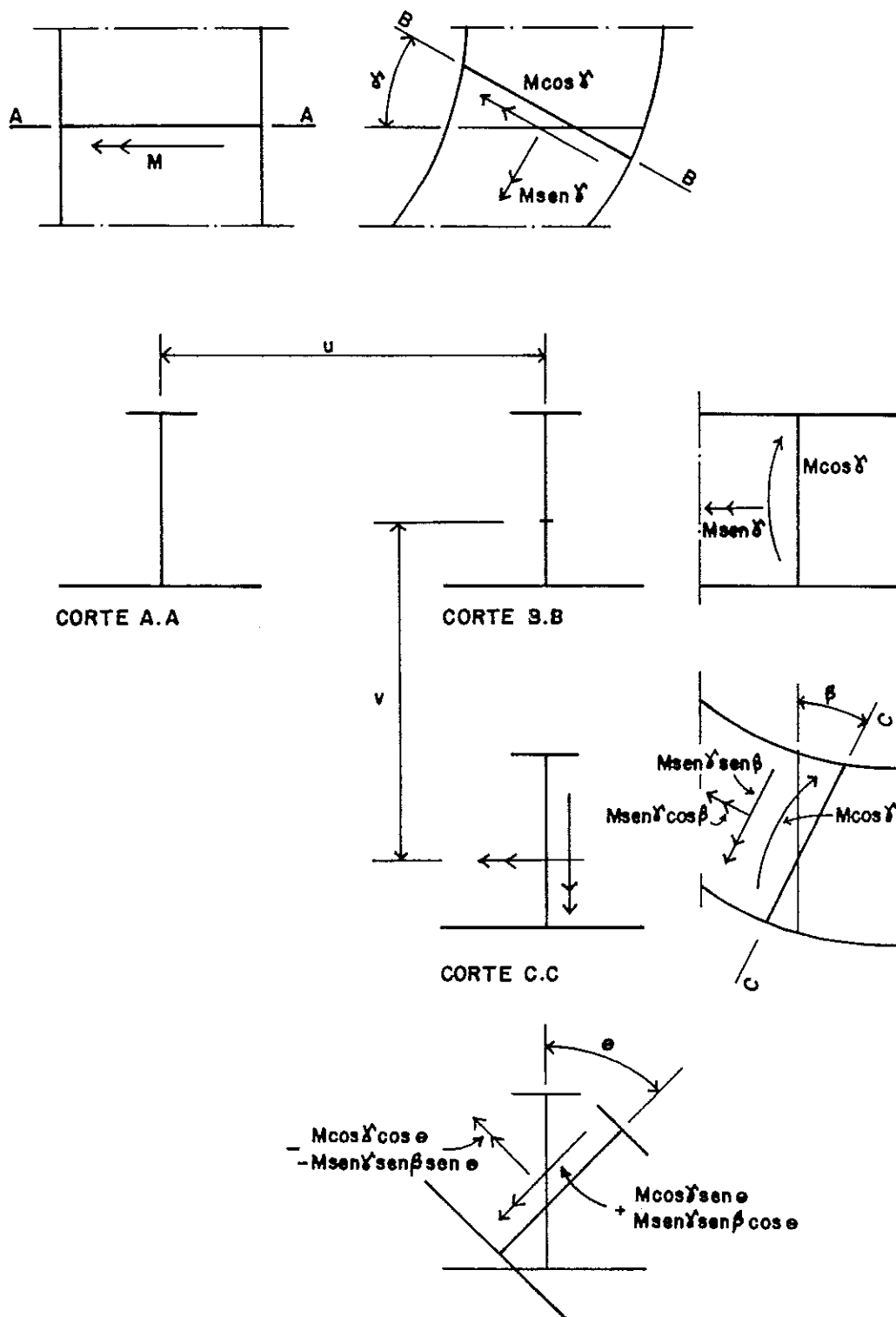


FIG. 4.7

## 5 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DA EQUAÇÃO GERAL PARA DIVERSOS ESQUEMAS ESTRUTURAIS

### 5.1 COEFICIENTE ASSOCIADO AO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES ( $C_b$ )

#### 5.1.1 Vigas sem carregamento transversal. (SALVADORI)

Os valores de  $C_b$  são de difícil determinação precisa a partir das eqs. 4.3.2 a 4.3.5, baseadas no método de Rayleigh, porém, com o uso de apenas um termo da expansão em série trigonométrica do ângulo de torção ( $\theta$ ) esta determinação torna-se simples e precisa para carregamento formado por momentos iguais aplicados às extremidades do trecho de viga em estudo, perdendo a precisão à medida que os momentos tornam-se diferentes (a precisão ainda é adequada para relação de momentos igual a 0,5).

Outra maneira de determinar  $C_b$  é a partir do método de Ritz aplicado ao funcional da energia potencial fornecido pela eq. 4.2.3.1 .

SALVADORI (1955) e (1956) determinou o coeficiente desta maneira, para vigas sem carregamento transversal, cuja relação, entre os momentos nas extremidades, variasse entre + 1,0 e - 1,0, porém, admitiu que a seção fosse simétrica ( $k = 0$ ).

SALVADORI esclarece que para momento constante basta um termo

da expansão em série trigonométrica de  $\theta$  e  $u$ , necessitando-se mais termos à medida que os momentos aplicados às extremidades da viga tornam-se diferentes.

Será apresentada a seguir a determinação de  $C_b$ , a partir dos dois métodos citados anteriormente, utilizando-se apenas o primeiro termo da expansão em série trigonométrica de  $\theta$  e  $u$  comparando-se os resultados com aqueles mais precisos indicados por SALVADORI (1955) e (1956), bem como com os valores tradicionalmente recomendados nas normas para dimensionamento.

#### 5.1.1.1 Método de Rayleigh com a utilização de um termo da série

Lembrando a eq. 4.3.2 :

$$C_b = \frac{\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz}{\sqrt{\left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \right]}}$$

Fazendo-se:

$$\theta = \theta_m \text{ sen } (\pi Z)$$

isto é, admitindo-se, que nas extremidades do trecho de viga em estudo haja impedimento à rotação por torção (de modo que  $\theta(0) = \theta(l) = 0$ ) e que o empenamento seja livre (de modo que  $d^2\theta/dz^2(0) = d^2\theta/dz^2(l) = 0$ ),

e também

$$M = M_1 + (M_2 - M_1) Z = M_2 [r + (1 - r) Z]$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são os momentos aplicados às extremidades do trecho de viga considerado sendo:

$$r = \frac{M_1}{M_2} \leq 1$$

obtêm-se:

$$\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dZ} \right)^2 dZ = \int_0^1 (\theta_m \pi)^2 \cos^2(\pi Z) dZ =$$

$$= (\theta_m \pi)^2 \int_0^1 \cos^2(\pi Z) dZ = \frac{(\theta_m \pi)^2}{2}$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dZ^2} \right)^2 dZ = (\theta_m \pi^2)^2 \int_0^1 \sin^2(\pi Z) dZ = \frac{(\theta_m \pi^2)^2}{2}$$

$$\int_0^1 m^2 \theta^2 dZ = \int_0^1 [r + (1 - r) Z]^2 [\theta_m \sin(\pi Z)]^2 dZ =$$

$$= r^2 \theta_m^2 \int_0^1 \sin^2(\pi Z) dZ + (1 - r^2) \theta_m^2 \int_0^1 Z^2 \sin^2(\pi Z) dz +$$

$$+ 2 r (1 - r) \theta_m^2 \int_0^1 Z \sin^2(\pi Z) dZ =$$

$$= \frac{r^2 \theta_m^2}{2} + \frac{\theta_m^2 (1 - r)^2}{6} + \frac{2 r (1 - r) \theta_m^2}{4} = \frac{\theta_m^2 (r^2 + r + 1)}{6}$$

Substituindo-se os resultados das várias integrais na expressão de  $C_b$  resulta:

$$C_b = \sqrt{\frac{3}{r^2 + r + 1}} \quad (5.1.1.1.1)$$

### 5.1.1.2 Método de Ritz com a utilização de um termo série

Considerando o funcional da energia potencial adicional dado pela eq. 4.2.3.1, com  $p$  e  $k$  nulos, obtém-se:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (E I_y u''^2 + E C_w \theta''^2 + G I_t \theta'^2 + 2 M \theta u'') dz$$

Será desenvolvido o cálculo de  $C_b$  para o caso de apoios simples no plano perpendicular ao da flexão inicial ( $K=1$ , conforme ítem 5.4.1) porém, como será visto no ítem 5.1.1.3, o tipo de vinculação pouco afeta os valores de  $C_b$ .

Fazendo-se:

$$u = u_m \operatorname{sen} \left( \frac{\pi Z}{\ell} \right)$$

o que equivale a supor apoios simples no plano perpendicular ao da flexão inicial, isto é,  $u(0) = u(\ell) = u''(0) = u''(\ell) = 0$ ,

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} \left( \frac{\pi Z}{\ell} \right)$$

o que equivale a supor que, nas extremidades, a torção seja impedida, isto é,  $\theta(0) = \theta(\ell) = 0$  e que o empenamento seja livre, isto é,  $\theta''(0) = \theta''(\ell) = 0$

e também

$$M = \bar{M} m(z)$$

onde  $\bar{M}$  é o máximo momento fletor no trecho considerado sendo:

$$m(z) = \left[ r + \frac{(1-r)z}{\ell} \right]$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta V = & \frac{1}{2} \left[ E I_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^4 u_m^2 \int_0^{\ell} \text{sen}^2 \left( \frac{\pi z}{\ell} \right) dz \right. \\ & + E C_w \left( \frac{\pi}{\ell} \right) \theta_m^2 \int_0^{\ell} \text{sen}^2 \left( \frac{\pi z}{\ell} \right) dz + \\ & + G I_t \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \theta_m^2 \int_0^{\ell} \cos^2 \left( \frac{\pi z}{\ell} \right) dz - \\ & - 2 \bar{M} \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 u_m \theta_m r \int_0^{\ell} \text{sen}^2 \left( \frac{\pi z}{\ell} \right) dz - \\ & \left. - 2 \bar{M} \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 u_m \theta_m \frac{(1-r)}{\ell} \int_0^{\ell} z \text{sen}^2 \left( \frac{\pi z}{\ell} \right) dz \right] \end{aligned}$$

Resolvendo-se as integrais resulta:

$$\Delta V = \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \frac{1}{4} \left\{ u_m^2 \left[ E I_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] + \theta_m^2 \left[ E C_w \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 + G I_t \right] - u_m \theta_m \bar{M} (1+r) \right\}$$

A energia potencial adicional deve ser mínima, portanto:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial u_m} = \frac{\partial \Delta V}{\partial \theta_m} = 0$$

Diferenciando-se  $\Delta V$  em relação  $u_m$  e  $\theta_m$  e igualando-se a zero resulta:

$$2 u_m \left[ E I_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] - \theta_m \bar{M} (1 + r) = 0$$

$$2 \theta_m \left[ E C_w \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 + G I_t \right] - u_m \bar{M} (1 + r) = 0$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 EI_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 & - \bar{M} (1 + r) \\ - \bar{M} (1 + r) & 2 \left[ EC_w \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 + GI_t \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ \theta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para haver solução diferente da trivial deve-se anular o determinante da matriz acima e assim tem-se:

$$\bar{M}^2 (1 + r)^2 - 4 EI_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \left[ EC_w \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 + GI_t \right] = 0$$

Resolvendo-se e rearranjando-se resulta:

$$\bar{M} = \frac{2}{(1 + r)} \left[ EI_y \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \sqrt{\frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{1}{\left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2} \right)} \right]$$

Comparando-se a expressão acima com a eq. 4.3.1 pode-se notar que os termos entre colchetes são iguais, para seções simétricas, extremidades simplesmente apoiadas e sem carregamento transversal, que foi o caso estudado. Assim sendo, neste caso, tem-se:



$$C_b = \frac{2}{(1+r)} \quad ( 5.1.1.2.1 )$$

### 5.1.1.3 Método de Ritz com a utilização do número adequado de termos

SALVADORI (1955) e (1956) calculou o coeficiente  $C_b$  pelo método de Ritz, utilizando o número adequado de termos da série trigonométrica, para vigas cuja geometria era caracterizada pelo parâmetro  $\mu = GI_t \ell^2 / EC_w$  e para dois tipos de vínculos: apoio simples no plano perpendicular ao da flexão inicial (admitindo torção impedida e empenamento livre nas extremidades) e engastamento no plano perpendicular ao da flexão inicial (torção e empenamento impedidos nas extremidades). Os resultados que chegou são os seguintes:

Para  $r = + 1.0$  ,  $C_b$  sempre é igual a 1,0, para ambas as condições de vínculo e para quaisquer valores de  $\mu$ .

Para  $r = + 0,5$  e  $r = 0,0$  ,  $C_b$  independe das condições de vínculo e praticamente independe de  $\mu$  (variação inferior à 2,2 %) se  $\mu \leq 40$ .

Para  $r = - 0,5$  e  $r = - 1,0$  ,  $C_b$  varia ligeiramente com os valores de  $\mu$  e com as condições de vínculo (variação inferior a 10 % para  $\mu \leq 40$ ).

Conforme SALVADORI, na prática  $\mu \leq 40$ , o que pode ser confirmado se for analisado o valor de  $\mu$ , no caso de seções monossimétricas em forma de "I", o que será feito a seguir:

Adotando-se, conforme Anexo B:

$$I_t = \frac{1}{3} \left[ b_f t_f^3 + (nb_f) t_f^3 + (h - 2t_f) t_w^3 \right]$$

$$C_w = \frac{(b_f^3 t_f) (nb_f)^3 t_f}{12 \left[ b_f^3 t_f + (nb_f)^3 t_f \right]} h^2$$

Sendo:

$n \geq 1$ , relação entre as larguras das mesas

$\nu = 0,3$  (coeficiente de Poisson)

resulta:

$$\mu \cong 6,154 \frac{(\ell/h)^2}{(b/t)^2} \left[ \frac{1}{4} (1 + n + m) \left( \frac{1}{n^3} + 1 \right) \right]$$

com :

$$m = \frac{(h - 2t_f)}{b_f} \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^3$$

Sabendo-se que os maiores valores de  $\mu$  ocorrem para  $n = 1$  (seção duplamente simétrica) e adotando-se valores exagerados para as relações entre dimensões das vigas, o que dificilmente, na prática ocorreria simultaneamente, tais como:  $\ell/h = 20$ ,  $b_f/t_f = 10$  e  $m = 0,5$  obtem-se  $\mu \cong 31$ .

Pode-se então avaliar que a indicação de SALVADORI deve ser adequada à maioria dos casos práticos.

Assim sendo SALVADORI propõe adotar os mínimos valores de  $C_b$ , no intervalo  $\mu \leq 40$ , dependentes apenas do tipo de carregamento, o que é coerente com a formulação proposta por CLARK (1962) e vista no ítem anterior, sendo independente, neste intervalo, das características geométricas, e condições de vínculo.

Os valores de  $C_b$  são os seguintes:

$r$	$C_b$
1,0	1,00
0,5	1,32
0,0	1,82
-0,5	2,49
-1,0	2,50

Convém ressaltar que, como as condições de vínculo pouco afetam os valores de  $C_b$ , dentro das hipóteses de SALVADORI, na prática, tais valores são utilizados, no caso de trechos de vigas, entre travamentos laterais, mesmo na presença de carregamentos transversais, desde que o diagrama de momentos seja aproximadamente linear e não haja cargas concentradas aplicadas acima do centro de torção (neste caso  $C_p \cong 0$ , podendo ser desconsiderada a influência do ponto de aplicação do carregamento).

#### 5.1.1.4 Comparação entre resultados

As normas brasileiras e internacionais recomendam para o cálculo deste coeficiente, a seguinte equação (vide capítulo 7), baseada nos estudos e conclusões de SALVADORI:

$$C_b = 1,75 - 1,05 r + 0,3 r^2 \leq 2,30$$

Na tabela a seguir serão apresentados os resultados obtidos a partir do método de Rayleigh (eq. 5.1.1.1.1) e do método de Ritz (eq. 4.1.1.2.1) utilizando-se, em ambos, apenas um termo da série trigonométrica, os valores médios obtidos por SALVADORI a partir do método de Ritz com o número adequado de termos e os valores recomendados pelas normas.

r	C <sub>b</sub>	C <sub>b</sub>	C <sub>b</sub>	C <sub>b</sub>
	*	**	Salvadori	Normas
	(Rayleigh com um termo)	(Ritz com um termo)	(Ritz com todos os termos)	ABNT/AISC
+1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
+0.5	1,31	1,33	1,32	1,30
0.0	1,73	2,00	1,82	1,75
-0.5	2,00	4,00	2,49	2,30(2,48)
-1,0	1,73	∞	2,50	2,30(3,10)

\* conforme eq. 5.1.1.1.1 deduzida nesta Dissertação

\*\* conforme eq. 5.1.1.2.1 deduzida nesta Dissertação

WINTER (1943), determinou o valor do  $M_{cr}$  para uma viga biapoiada, submetida a momento constante com seção monossimétrica em forma de "I", a partir do método energético ( $\Delta V = 0$ ), e com a utilização de apenas um termo da expansão em série trigonométrica do ângulo de torção. Rearranjando-se a expressão deduzida por WINTER e lembrando-se os valores aproximados de  $C_w$  e  $k$  indicados no ANEXO B, conclui-se que também neste caso,  $C_b = 1,0$ .

A partir de GOODIER (1942) E TIMOSHENKO (1961) (vide capítulo 6), também conclui-se que  $C_b = 1$  para vigas com seção qualquer, submetidas a momento constante.

### 5.1.2 Vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou força concentrada no meio do vão. Equações diferenciais. (AUSTIN/TIMOSHENKO)

As equações diferenciais que governam a flambagem lateral de uma viga podem ser obtidas a partir da variação do funcional da energia potencial adicional fornecido pela eq. 4.2.3.1, ou seja:

$$\delta[\Delta V(u, \theta)] = \int_0^{\ell} (EI_y u'' \delta u'' + EC_w \theta'' \delta \theta'' + GI_t \theta' \delta \theta' + M u'' \delta \theta + M \theta \delta u'' - 2 k M \theta' \delta \theta' - p a \theta \delta \theta) dz = 0$$

Integrando-se por partes resulta:

$$\int_0^l EI_y u'' \delta u'' dz = EI_y \left[ u'' \delta u' - u'''' \delta u \right]_0^l + \int_0^l EI_y u'''' \delta u dz$$

$$\int_0^l EC_w \theta'' \delta \theta'' dz = EC_w \left[ \theta'' \delta \theta' - \theta'''' \delta \theta \right]_0^l + \int_0^l EC_w \theta'''' \delta \theta dz$$

$$\int_0^l GI_t \theta' \delta \theta' dz = GI_t \left[ \theta' \delta \theta \right]_0^l - \int_0^l GI_t \theta'' \delta \theta dz$$

$$\int_0^l M\theta u'' dz = \left[ M\theta \delta u' - (M\theta)' \delta u \right]_0^l + \int_0^l (M\theta)'' \delta u dz$$

$$\int_0^l M\theta' \delta \theta' dz = \left[ (M\theta)' \delta \theta \right]_0^l - \int_0^l (M\theta)'' \delta \theta dz$$

Sabendo-se que, nas extremidades simplesmente apoiadas no plano perpendicular ao da flexão inicial, tem-se:

condições essenciais:

$$\delta u = 0$$

$$\theta = \delta \theta = 0 \text{ (admitindo-se que haja} \\ \text{restrição à rotação por} \\ \text{torção)}$$

condições naturais :

$$u'' = \theta'' = 0$$

e que, nas extremidades com engastamento no plano perpendicular ao da flexão inicial, tem-se:

condições essenciais:

$$\delta u = \delta u' = 0$$

$$\theta = \delta \theta = \theta' = \delta \theta' = 0$$

Substituindo-se tais valores em  $\delta[\Delta V]$  fornecido anteriormente,

obté-m-se:

$$\delta[\Delta V(u, \theta)] = \int_0^l \left\{ \left[ EI_y u'''' + (M \theta)'' \right] \delta u + \left[ EC_w \theta'''' - \right. \right. \\ \left. \left. - GI_t \theta'' + M u'' + 2 k M \theta'' - p a \theta \right] \delta \theta \right\} dz = 0$$

A igualdade deve ser válida para quaisquer  $\delta u$  e  $\delta \theta$ , de modo que:

$$EI_y u'''' + (M \theta)'' = 0$$

$$EC_w \theta'''' - GI_t \theta'' + M u'' + 2 k M \theta'' - p a \theta = 0$$

Que são as equações diferenciais que governam o fenômeno da flambagem lateral, respeitadas as hipóteses deste trabalho.

AUSTIN; YEGIN; TUNG (1955), a fim de determinar  $M_{cr}$ , resolveram as equações diferenciais, numericamente, utilizando método de aproximações sucessivas, dividindo a viga em 24 partes iguais (informam os autores que o tempo de processamento foi de 10 horas) e baseados na hipótese da seção ser simétrica ( $k = 0$ ).

AUSTIN apresenta uma série de tabelas com valores adimensionais e auxiliares para o cálculo do  $M_{cr}$ , em função de:

- tipo de carregamento: carregamento uniformemente distribuído ou carga concentrada no meio do vão.
- ponto de aplicação do carregamento: no topo, na base ou no centro geométrico (coincidente com o centro de torção) da

seção.

-rigidezes à rotação na flexão, tanto no plano da flexão sub-crítica, quanto no plano perpendicular a este, variáveis de 0 (apoio simples) a  $\infty$  (engastamento perfeito).

- $\mu$  (o mesmo  $\mu$  utilizado por SALVADORI, conforme ítem 5.1.1.3) variando entre 0 e 100.

Admitindo-se, por hipótese (os resultados confirmam esta hipótese), neste e nos próximos ítems, que os valores de  $C_b$  independem do ponto de aplicação do carregamento, pode-se calculá-los para o caso do carregamento aplicado no centro de torção ( $a = 0$ )

Comparando-se a expressão para o cálculo da carga crítica, conforme AUSTIN (1955), com a eq. 4.3.1 (com  $a = 0$  e  $k = 0$ ), é possível deduzir-se a expressão, fornecida a seguir, que permite a determinação dos valores de  $C_b$ :

$$C_b = \frac{2 K^2 \chi}{n \pi^2 \sqrt{1 + \frac{K^2 \mu}{\pi^2}}} \quad ( 5.1.2.1 )$$

Sendo  $\chi$  a denominação dada aos valores tabelados por AUSTIN, neste caso o valor correspondente à aplicação do carregamento no centro de torção, e  $n$  e  $K$ , conforme tabela a seguir:



Condições de vinculação		Tipo de carregamento			
plano da flexão inicial	plano perpendicular ao da flexão inicial	carregamento uniformemente distribuído		carga centrada no meio do vão	
		n	K	n	K
engastamento	engastamento	24	0,5	8	0,5
engastamento	apoio simples	24	1,0	8	1,0
apoio simples	engastamento	8	0,5	4	0,5
apoio simples	apoio simples	8	1,0	4	1,0

Os valores de  $C_b$ , calculados a partir da eq. 5.1.2.1 ( $\mu \leq 100$ ), são listados a seguir:

Condições de vinculação		Tipo de carregamento	
plano da flexão inicial	plano perpendicular ao da flexão inicial	carregamento uniformemente distribuído	
			carga centrada no meio do vão
engastamento	engastamento	0,86*	1,04
engastamento	apoio simples	1,30*	1,70
apoio simples	engastamento	0,97**	1,07**
apoio simples	apoio simples	1,13**,*	1,35**,*

- \* Estes valores estão relacionados com o momento no meio do vão,  $pl^2/24$ , ou seja o momento que provoca flambagem lateral
- \*\* Estes valores também podem ser calculados (para  $\mu \leq 320$ ) a partir de TIMOSHENKO (1936) e (1961), que resolve as equações diferenciais expandindo a função  $\theta$  em série polinomial infinita com a utilização da expressão fornecida a seguir, que pode ser deduzida a partir da comparação do formulário proposto por TIMOSHENKO com a eq. 4.3.1 :

$$C_b = \frac{K^2 \gamma \sqrt{\mu}}{n \pi^2 \sqrt{1 + \frac{K^2 \mu}{\pi^2}}} \quad ( 5.1.2.2 )$$

onde  $\gamma$  ( $\gamma_2$  ou  $\gamma_4$ ) é definido em TIMOSHENKO (1961),  $\mu = GI_t \ell^2 / EC_w$  e  $n$  e  $K$  os mesmos fornecidos anteriormente neste ítem.

- \*\*\* Estes valores também podem ser calculados a partir de DE VRIES (1947), que utiliza o método energético ( $\Delta V = 0$ ) e expande a função do ângulo de torção em série trigonométrica com dois termos, com o auxílio da seguinte expressão, deduzida de forma similar às apresentadas anteriormente:

$$C_b = \frac{4 k}{\pi^2 \sqrt{1 + \frac{\mu}{\pi^2}}} \quad ( 5.1.2.3 )$$

onde  $k$  é um adimensional auxiliar determinado por DE VRIES (1947)

\*\*\* Estes valores também podem ser confirmados a partir de VLASSOV (1962), que generaliza as conclusões de TIMOSHENKO.

Deve ser citado que a equação geral para a determinação do momento crítico (eq. 4.3.1) não foi deduzida prevendo ocorrência de cargas concentradas, mas como se pode perceber neste e nos itens seguintes a referida equação pode receber tal generalização.

### 5.1.3 Vigas biapoiadas submetidas a duas cargas concentradas (SCHRADER)

SCHRADER (1943), a partir do método energético ( $\Delta V = 0$ ), e com a utilização de um termo da expansão em série trigonométrica do ângulo de torção, deduziu uma expressão para a determinação da carga crítica de vigas com carregamento constituído de duas cargas concentradas, simetricamente localizadas em uma viga biapoiada (apoios simples) e distanciadas dos apoios de "c".

A partir deste trabalho e com o auxílio da expressão fornecida a seguir, é possível determinar  $C_b$ .

$$C_b = \left(\frac{c}{\ell}\right) \frac{A}{\pi^2} \sqrt{\frac{B + D \mu}{1 + \frac{\mu}{\pi^2}}}$$

onde A, B e D são adimensionais auxiliares e determinados por SCHRADER (1943).

Analisando-se a expressão anterior, no intervalo  $0 \leq \mu \leq 50$ , nota-se que  $C_b$  permanece aproximadamente constante para cada valor de  $c/\ell$ .

Os valores de  $C_b$  calculados são listados a seguir:

$\frac{c}{\ell}$	$C_b$	$\frac{c}{\ell}$	$C_b$
0,05	1,00	0,30	1,06
0,10	1,00	0,35	1,09
0,15	1,01	0,40	1,17
0,20	1,02	0,45	1,25
0,25	1,04	0,50	1,37

Convém ressaltar que, nas bibliografias consultadas encontra-se, para este esquema estrutural, ou o valor de  $C_b$  apenas para  $c/\ell = 0,25$ , em CLARK (1962), ou uma curva aproximada  $C_b = 1 + (c/\ell)^2$ , em NETHERCOT; ROCKEY (1972)

#### 5.1.4 Vigas biapoiadas e com travamento lateral

##### (TIMOSHENKO/DE VRIES)

TIMOSHENKO (1936) e (1961) e DE VRIES (1943) analisaram a situação estrutural que corresponde a uma viga simplesmente apoiada, mas com um travamento lateral rígido no meio do vão. Utilizando-se as equações de transformação eqs. 5.1.2.2 (com

$K = 1$  e  $n = 8$  no caso de carga concentrada e  $n = 16$  no caso de carregamento uniformemente distribuído) e 5.1.2.3, e lembrando que o " $l$ " a ser colocado na equação geral de  $M_{cr}$  (eq. 4.3.1) e no cálculo do valor de  $\mu$  deve ser a metade do vão total da viga, resulta:

$\mu$	$C_b$	
	Carregamento uniformemente distribuído	Carga concentrada no meio do vão
1*	1,334	1,859
4*	1,346	1,846
9**	1,334	1,843
16**	1,331	1,835
24*	1,331	1,825
25**	1,331	1,828
32*	1,329	1,823
36**	1,329	1,821
49**	1,327	1,815
50*	1,324	1,811
196**	1,317	1,793

\* Timoshenko

\*\* De Vries

NOTA: Convém esclarecer que em TIMOSHENKO (1936) e (1961) há uma incorreção nos valores de " $\gamma$ " fornecidos pelo autor, para o caso de  $\mu = 16$ .

Como foi analisado no item 5.1.1.3, na prática  $\mu \leq 40$ . Assim sendo pode-se adotar, com bastante precisão:  $C_b = 1,33$  para carregamento uniformemente distribuído e  $C_b = 1,82$  para carga concentrada no meio do vão.

Convém notar que esta última situação é similar àquela

estudada por SALVADORI, já citada no item 5.1.1.3, com  $r = 0$  e o valor de  $C_b = 1,33$ , para carregamento uniformemente distribuído, não é encontrado em quaisquer das bibliografias consultadas.

#### 5.1.5 Vigas em balanço

Para os carregamentos apresentados neste item não há necessidade do impedimento ao deslocamento lateral ou à rotação por torção da extremidade livre, sendo esta considerada isenta de qualquer vinculação. A presença de vínculos nesta extremidade é analisada em NETHERCOT (1973). Esta Dissertação não abrange o caso de momento fletor aplicado à extremidade livre, para o qual recomenda-se a leitura de SALEEB; CHANG; GENDY (1992).

Para o caso de vigas em balanço, o valor de  $C_b$  depende da geometria da peça e não se torna tão confortável o uso da eq. 4.3.1, mas, serão fornecidos alguns valores de  $C_b$  em função de  $\mu$ , baseados nos trabalhos de diversos autores, e das expressões de transformação indicadas.

##### 5.1.5.1 Carga concentrada (TIMOSHENKO)

TIMOSHENKO (1936) e (1961) resolveu as equações diferenciais da flambagem lateral de vigas com seção simétrica, em balanço, totalmente engastadas em uma extremidade e totalmente livres na outra, submetidas a uma carga concentrada na

extremidade livre e aplicada no centro de torção, a partir do desenvolvimento em série polinomial infinita do ângulo de torção.

A partir de TIMOSHENKO (1961) e com o auxílio da expressão fornecida a seguir, é possível determinar os valores de  $C_b$  para este caso.

$$C_b = \frac{\gamma_2}{\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\mu}}}$$

onde  $\gamma_2$  é um adimensional auxiliar determinado por TIMOSHENKO (1961)

A seguir fornece-se alguns valores de  $C_b$ :

$\mu$	$C_b$	$\mu$	$C_b$
1	1,51	10	1,71
2	1,59	12	1,70
3	1,64	16	1,68
4	1,67	40	1,61
8	1,71		

Para outros valores de  $C_b$  sugere-se utilizar a seguinte expressão, determinada por NETHERCOT (1973) para  $\mu \geq 4$  :

$$C_b = 1,287 - \frac{3,539}{\mu} + \frac{2,521}{\sqrt{\mu}}$$

NOTA: CLARK (1962) recomenda a utilização, por simplicidade, de um único valor para  $C_b$ , sugerindo a adoção do conservador  $C_b = 1,28$ , adequado a vigas com  $\mu \rightarrow \infty$  ou seja  $C_w = 0$ . Porém para  $2 \leq \mu \leq 40$ , é possível adotar-se  $C_b = 1,60$ , acarretando um acréscimo de 25 % no valor da carga crítica se comparado com o valor calculado conforme as bibliografias que se baseiam nas recomendações de CLARK (por exemplo : SALMON; JOHNSON (1980)).

NOTA: Convém ressaltar que, na prática  $\mu \geq 4$ , pois conforme NETHERCOT (1972) e (1973), para valores inferiores a 4, na maior parte dos casos estudados por ele, a seção já se encontra na região inelástica, ou seja, atinge o limite de escoamento antes de ocorrer a flambagem.

#### 5.1.5.2 Carregamento uniformemente distribuído (POLEY)

POLEY (1954), resolveu, pelo método das diferenças finitas, as equações diferenciais da flambagem lateral de vigas em balanço, com seção duplamente simétrica, totalmente engastadas em uma extremidade e totalmente livres na outra, submetidas a carregamento uniformemente distribuído e aplicado no centro de torção.

A partir do trabalho de POLEY e com o auxílio da expressão abaixo é possível determinar os valores de  $C_b$ , para o caso estudado, que como no caso anterior também depende de  $\mu$ .



$$C_b = \frac{m}{2 \pi \sqrt{\frac{\pi^2}{\mu} + 1}}$$

onde  $m$  é um adimensional auxiliar determinado por POLEY (1954)

A seguir fornece-se alguns valores de  $C_b$ :

$\mu$	$C_b$	$\mu$	$C_b$
1	3,23	12	3,34
2	3,33	14	3,30
3	3,38	16	3,25
4	3,40	24	3,15
8	3,40	32	3,05
10	3,36	40	2,98

Para outros valores de  $C_b$  sugere-se utilizar a seguinte expressão, determinada por NETHERCOT (1973) para  $\mu \geq 4$ :

$$C_b = 2,030 - \frac{9,114}{\mu} + \frac{7,245}{\sqrt{\mu}}$$

NOTA: CLARK (1962) recomenda a utilização, por simplicidade, de um único valor para  $C_b$ , sugerindo a adoção do conservador  $C_b = 2,05$ , adequado a vigas com  $\mu \rightarrow \infty$  ou seja  $C_w = 0$ . Porém para  $1 \leq \mu \leq 40$ , é possível adotar-se  $C_b = 3,00$ , acarretando um acréscimo de 46 % no valor da carga crítica, se comparado com o valor calculado conforme as bibliografias baseadas nas recomendações de CLARK (por exemplo: SALMON; JOHNSON (1980)).

### 5.1.6 Conclusões

Analisando-se os trabalhos citados nos itens 5.1.1 a 5.1.5 e seus resultados, pode-se concluir que:

- A expressão recomendada pelas normas para o cálculo de  $C_b$  é aceitável, quando utilizada dentro das hipóteses adotadas no item 5.1.1, destacando-se: vigas com seção duplamente simétrica, sem carregamento transversal e com  $\mu \leq 40$ . Na prática é possível adotar-se esta expressão quando, mesmo na presença de carregamento transversal (item 5.1.1.3), o diagrama de momentos fletores se mostrar aproximadamente linear entre travamentos e na ausência de cargas concentradas aplicadas acima do centro de torção.
- A expressão recomendada pelas normas, provoca resultados anti-econômicos, quando aplicada aos casos estudados nos itens 5.1.2 a 5.1.5, ou seja, na presença de carregamento transversal, onde tais normas sugerem por simplicidade  $C_b = 1,0$ . Respeitadas as hipóteses de cálculo, o valor de  $C_b$  pode perfeitamente ser substituído pelos valores fornecidos neste trabalho.
- $C_b = 1,33$ , para vigas simplesmente apoiadas, com travamento lateral rígido e centralizado (neste caso  $l$  é a metade do vão total da viga), com carregamento uniformemente distribuído e  $\mu \leq 40$  (item 5.1.4). Este valor de  $C_b$  não é fornecido em nenhuma das bibliografias consultadas, mas como foi visto pode ser perfeitamente utilizado.

- No caso das vigas em balanço (item 5.1.5), o valor de  $C_b$  depende também da geometria da viga. A favor da segurança e por simplicidade pode-se adotar  $C_b = 1,60$ , no caso de força concentrada e  $C_b = 3,00$ , no caso de carregamento uniformemente distribuído, desde que  $2 \leq \mu \leq 40$ . Estes valores são superiores àqueles normalmente encontrados nas bibliografias que seguem as recomendações de CLARK.
- O valor de  $C_b$  depende do tipo de carregamento e condições de vínculo, não sendo influenciado, na prática ( $\mu \leq 40$ ), pela geometria da peça (exceto no caso das vigas em balanço), ou, por hipótese, pela posição do carregamento.
- Pouco se pode concluir sobre a influência da monossimetria da seção no valor de  $C_b$ , exceto para vigas submetidas a momento fletor constante, para as quais  $C_b = 1,0$ .
- Nas extremidade do trecho de viga em estudo deve haver impedimento ao deslocamento lateral e à rotação por torção, exceto no caso da extremidade livre das vigas em balanço (ver primeiro paragrafo da introdução do item 5.1.5).

## 5.2 COEFICIENTE ASSOCIADO À POSIÇÃO DO CARREGAMENTO ( $C_p$ )

Os valores de  $C_p$  são também de difícil determinação analítica a partir do método de Rayleigh, com o formulário proposto por CLARK (1962), mas pode-se notar, pela eq. 4.3.3, que para momentos fletores com variação linear, ou seja os casos estudados por SALVADORI, o numerador de tal expressão anula-se, portanto,  $C_p = 0$ .

Além disso, pode-se calcular o valor de  $C_p$  a partir dos trabalhos de diversos autores, que estudaram vários casos particulares de esquemas estruturais. É o que será apresentado a seguir.

### 5.2.1 Vigas submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou carga concentrada no meio do vão (AUSTIN)

Comparando-se a expressão para o cálculo da carga crítica, conforme AUSTIN (1955), (considerações sobre este trabalho já foram feitas no ítem 5.1.2.1) com a eq. 4.3.1, com  $k = 0$  e  $a = +h/2$  ou  $a = -h/2$ , é possível deduzir-se as expressões, fornecidas a seguir, que permitem a determinação dos valores de  $C_p$ :

$$C_p = \text{abs} \left( \frac{1 + \frac{K^2 \mu}{\pi^2} - t^2}{2 t} \right) \quad ( 5.2.1 )$$

onde:

$$t = \frac{2 K^2 \chi}{C_b n \pi^2} \quad ( 5.2.2 )$$

Sendo  $\chi$ , neste caso, o valor tabelado em AUSTIN (1955) correspondente à aplicação do carregamento fora do centro de torção ( $a = +h/2$  ou  $a = -h/2$ ) e  $n$  e  $K$  conforme ítem 5.1.2.

Os valores de  $C_p$  calculados a partir das eqs. 5.2.1 e 5.2.2 ( $\mu \leq 100$ ) são listados a seguir:

Condições de vinculação		Tipo de carregamento	
plano da flexão inicial	plano perpendicular ao da flexão inicial	carregamento uniformemente distribuído	força centrada no meio do vão
engastamento	engastamento	0,82	0,84
engastamento	apoio simples	1,55	1,42
apoio simples	engastamento	0,29	0,42
apoio simples	apoio simples	0,45*	0,55*

\* Estes valores podem ser confirmados (para  $\mu \leq 200$ ) a partir de TIMOSHENKO (1936) e (1961), com a utilização da eq. 5.2.1 porém com  $t$  (cuja dedução pode ser feita de maneira similar à apresentada) igual a:

$$t = \frac{\gamma \sqrt{\mu}}{C_b n \pi^2}$$

\* Estes valores podem também ser confirmados a partir de DE VRIES (1947), com a utilização da eq. 5.2.1, porém com o valor de  $t$  igual a:

$$t = \frac{4 k}{C_b \pi^2}$$

Como se pode observar,  $C_p$  não depende da geometria da peça

( $\mu \leq 100$ ) e, neste caso, não depende também do ponto de aplicação do carregamento, assim sendo, se esta hipótese fosse adotada inicialmente a eq. 5.2.1 poderia ser simplificada, apresentando-se das seguintes formas:

$$C_p = \frac{\chi^{(2)} - \chi^{(1)}}{2 C_b n \pi^2} K^2 \quad (\text{AUSTIN})$$

$$C_p = \frac{\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}}{2 C_b n \pi^2} \sqrt{\mu} K^2 \quad (\text{TIMOSHENKO})$$

$$C_p = 2 \frac{k^{(2)} - k^{(1)}}{C_b \pi^2} \quad (\text{DE VRIES})$$

Onde o índice superior indica :

- (1)- carregamento aplicado na mesa superior
- (2)- carregamento aplicado na mesa inferior

Tendo em vista que a independência de  $C_p$  em relação ao ponto de aplicação do carregamento não é um caso geral, será mantida a eq. 5.2.1, na sua forma original, nas análises subseqüentes.

#### 5.2.2 Vigas biapoiadas submetidas a duas cargas concentradas (SCHRADER)

A partir da expressão deduzida por SCHRADER (1943) (vide ítem

5.1.3) é possível determinar  $C_p$  com o auxílio da eq. 5.2.1, porém com  $t$  igual a:

$$t = \frac{\left(\frac{c}{\ell}\right) A \left[ 1 + \sqrt{1 + B + D \mu} \right]}{C_b \pi^2}$$

Analisando-se a expressão anterior, juntamente com a eq. 5.2.1, no intervalo  $0 \leq \mu \leq 50$  nota-se que  $C_p$  permanece aproximadamente constante para cada  $c/\ell$ . Os valores de  $C_p$  são listados a seguir:

$\frac{c}{\ell}$	$C_p$	$\frac{c}{\ell}$	$C_b$
0,05	0,10	0,30	0,47
0,10	0,19	0,35	0,52
0,15	0,28	0,40	0,54
0,20	0,36	0,45	0,55
0,25	0,42	0,50	0,55

Convém ressaltar que, nas bibliografias consultadas encontra-se, para este esquema estrutural, o valor de  $C_p$  apenas para  $c/\ell = 0,25$  em CLARK (1962).

NOTA: A hipótese da independência de  $C_p$  em relação ao ponto de aplicação do carregamento, também neste caso, levaria a uma grande simplificação na eq. 5.2.1 que se apresentaria da seguinte forma:

$$C_p = \frac{A \left(\frac{C}{\ell}\right)}{C_b \pi^2}$$

### 5.2.3 Vigas biapoiadas e com travamento lateral (TIMOSHENKO/DE VRIES)

A partir dos trabalhos de TIMOSHENKO (1936) e (1961) e DE VRIES (1947), aplicados a vigas simplesmente apoiadas e com travamento lateral centralizado e rígido, e com o auxílio da eq. 5.2.1, com "t" fornecido a seguir, é possível determinar-se o valor de  $C_p$ .

$$t = \frac{\gamma \sqrt{\mu}}{16 C_b \pi^2}$$

Com  $\gamma$  fornecido em TIMOSHENKO (1961)

$$t = \frac{4 k}{C_b \pi^2}$$

Com k fornecido em DE VRIES (1947)

A seguir são apresentados os valores de  $C_p$ , calculados a partir dos trabalhos de TIMOSHENKO(\*) E DE VRIES(\*\*):



$\mu$	$C_p$
	Carregamento uniformemente distribuído
1*	0,137/0,134
4*	0,140/0,142
9**	0,133/0,133
16**	0,133/0,132
24*	0,135/0,139
25**	0,132/0,131
32*	0,134/0,138
36**	0,131/0,130
49**	0,131/0,130
50*	0,132/0,135
196**	0,128/0,129

Os dois valores da coluna de  $C_p$  referem-se a carregamentos localizados em  $a = h/2$  e  $a = -h/2$ .

NOTA: Convém esclarecer que em TIMOSHENKO (1936) e (1961) há uma incorreção nos valores de " $\gamma$ " fornecidos pelo autor, para o caso de  $\mu = 16$ .

Observando-se esta última tabela pode-se adotar com bastante precisão, para o caso considerado,  $C_p = 0,13$ .

Quando a carga é concentrada no meio do vão da viga, isto é, coincidente com a localização do travamento lateral, a ligação entre eles deve ser tal, que se possa considerar a carga aplicada no centro de torção.

#### 5.2.4 Vigas em balanço (NETHERCOT)

Apesar de a mesa superior ser neste caso a mesa tracionada, ainda é ela a que mais deforma após a flambagem, conforme NETHERCOT (1983), e a estabilidade lateral se reduz conforme sobe o posição do carregamento relativamente ao centro de torção.

Baseado no método dos elementos finitos, cuja formulação é encontrada em BARSOUM; GALLAGHER (1970), NETHERCOT (1973) desenvolveu um formulário para o cálculo de vigas em balanço com seção duplamente simétrica, com  $\mu \geq 4$ , totalmente engastadas em uma das extremidades e totalmente livres na outra, submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou carga concentrada na extremidade livre (ver primeiro paragrafo da introdução do item 5.1.5).

A partir do trabalho de NETHERCOT é possível determinar os valores de  $C_p$  com auxílio da eq. 5.2.1., porém com  $t$  igual a:

$$t = B \sqrt{1 + \frac{\mu}{\pi^2}}$$

sendo  $B = 1/B_1$  para carregamentos na mesa superior e

$B = B_2$  para carregamentos na mesa inferior

onde  $B_1$  e  $B_2$  são adimensionais auxiliares indicados em NETHERCOT (1973)

São listados a seguir alguns valores de  $C_p$ :

$\mu$	$C_p$ (1)		$C_p$ (2)	
	Carregamento uniforme	Carga concentrada	Carregamento uniforme	Carga concentrada
4	1,56	1,50	0,98	0,56
8	1,26	1,14	0,96	0,58
10	1,19	1,06	0,95	0,45
12	1,14	1,00	0,94	0,44
16	1,08	0,93	0,94	0,42
20	1,04	0,94	0,94	0,41
40	0,95	0,76	0,95	0,38
	<i>0,60</i>		<i>0,65(?)</i>	

(1) carregamentos na mesa superior

(2) carregamentos na mesa inferior

Como se pode notar  $C_p$ , nas vigas em balanço, depende também da geometria da peça e da posição do carregamento.

CLARK (1962) recomenda, para o caso de carga concentrada,  $C_p = 0,64$  e se omite no caso de carregamento uniformemente distribuído. A determinação de tal valor foi baseada no trabalho de KERENSKY; FLINT; BROWN (1956) que por simplicidade adotaram  $C_w = 0$  e carregamento aplicado no topo da seção, o que perturbou a dedução de CLARK.

Seguindo a mesma linha de simplicidade adotada por CLARK, sugere-se que sejam adotados os seguintes valores, para  $4 \leq \mu \leq 40$ :  $C_p = 1,50$  e  $0,38$  no caso de carga concentrada aplicada respectivamente na mesa superior e inferior e  $C_p = 1,56$  e  $0,95$  no caso de carregamento uniformemente

distribuído aplicado respectivamente na mesa superior e inferior.

Estas recomendações provocarão uma redução no valor do  $M_{cr}$  de 11 % (carga na mesa inferior, em vigas com  $\mu = 4$ ) a 42 % (carga na mesa superior, em vigas com  $\mu = 40$ ).

### 5.2.5 Conclusões

Analisando-se os trabalhos citados nos itens 5.2.1 a 5.2.4 e os seus resultados, pode-se concluir que:

-As normas ABNT, AISC e AISI (vide Cap. 6), omitem-se quanto à influência da posição do carregamento, o que se pode tornar contra a segurança, mas, respeitadas as hipóteses de cálculo, pode-se utilizar os valores de  $C_p$  apresentados neste item e calcular-se  $M_{cr}$ , a partir da eq. 4.3.1.

- $C_p = 0$  para vigas sem carregamento transversal. Na prática é possível adotar-se este mesmo valor quando, mesmo na presença de carregamento transversal, exceto carga concentrada, o diagrama de momentos se mostrar aproximadamente linear.

- $C_p = 0,13$  para vigas simplesmente apoiadas, com travamento lateral rígido e centralizado, com carregamento uniformemente distribuído e  $\mu \leq 40$ . Este valor de  $C_p$  não é fornecido em nenhuma das bibliografias consultadas, mas como foi visto (item 5.2.3) pode ser perfeitamente utilizado.

-Nas vigas em balanço o valor de  $C_p$  depende da geometria da peça e da posição do carregamento. A favor da segurança e por

simplicidade pode-se adotar  $C_p = 1,50$  e  $0,38$  no caso de força concentrada, aplicada respectivamente na mesa superior e inferior e  $C_p = 1,56$  e  $0,95$  no caso de carregamento uniformemente distribuído, aplicado respectivamente na mesa superior e inferior, desde que  $4 \leq \mu \leq 40$ . Estes valores provocam uma redução no  $M_{cr}$ , se baseado nas bibliografias que seguem as recomendações de CLARK.

-O valor de  $C_p$  depende do tipo de carregamento e condições de vínculo não sendo influenciado, na prática ( $\mu \leq 40$ ), pela geometria da peça ou pela posição do carregamento, exceto nas vigas em balanço.

-Nada se pode concluir sobre a influência da monossimetria da seção.

### 5.3 COEFICIENTE ASSOCIADO A MONOSSIMETRIA DA SEÇÃO ( $C_k$ )

Os valores de  $C_k$ , como os dos demais coeficientes da eq. 4.3.1., são de difícil determinação precisa a partir das eqs. 4.3.2. a 4.3.5., baseadas no método de Rayleigh e deduzidas por CLARK (1962). Nos itens seguintes serão apresentados os valores recomendados pelas bibliografias consultadas.

#### 5.3.1. Vigas submetidas a momento constante

Como ilustração será deduzido o valor de  $C_k$ , utilizando a eq. 4.3.4, para vigas submetidas a momento constante, expandindo em série trigonométrica o ângulo de torção, mas

aproveitando apenas o primeiro termo.

Lembrando a eq. 4.3.4.

$$C_k = \frac{\int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz}{\sqrt{\left[ \int_0^1 m^2 \theta^2 dz \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz \right]}}$$

No ítem 5.1.1.1 foi determinado o denominador desta expressão, admitindo-se que as extremidades das vigas tenham impedimento de rotação à torção, porém permitam o livre empenamento. O resultado encontrado foi o seguinte:

$$\sqrt{\left[ \frac{(\theta_m \pi^2)^2}{2} \right] \left[ \frac{\theta_m^2 (r^2 + r + 1)}{6} \right]}$$

que para  $r = 1$  vale :

$$\frac{(\theta_m \pi)^2}{2}$$

O numerador da expressão anterior vale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 m \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz &= \int_0^1 (\theta_m \pi)^2 \text{sen}^2 (\pi z) dz = \\ &= (\theta_m \pi)^2 \int_0^1 \text{sen}^2 (\pi z) dz = \frac{(\theta_m \pi^2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto tem-se  $C_k = 1,0$

WINTER (1943) confirma este valor para vigas com seção monossimétrica, conforme indicado no item 5.1.1.4.

GOODIER (1942) e TIMOSHENKO (1961) confirmam este valor para  $C_k$ , no caso de vigas com seção qualquer, conforme indicado no capítulo 6.

### 5.3.2 Vigas submetidas a carregamento transversal

ANDERSON; TRAHAIR (1972), resolveram numericamente, pelo método das integrais finitas, as equações diferenciais da flambagem lateral de vigas com seção monossimétrica, simplesmente apoiadas e em balanço, submetidas a carregamento uniformemente distribuído ou força concentrada, aplicados no centro de torção ou fora dele.

São apresentadas nesse trabalho tabelas com as cargas críticas para as situações estruturais citadas, mas em função da geometria da peça, não tendo sido possível generalizar o resultado como nos casos anteriores de determinação de  $C_b$  e  $C_p$ .

Os autores apresentam, também, conclusões de cunho qualitativo, confirmadas por investigações experimentais realizadas por eles, que são citadas a seguir.

O efeito da monossimetria, também conhecido como efeito Wagner (\*), nas vigas simplesmente apoiadas é tal, que a carga crítica é maior quando a mesa tracionada é a menor das duas mesas, isto é  $k < 0$  e portanto  $C_k > 0$ , mesmo quando o

carregamento estiver fora do centro de torção.

No caso de vigas em balanço, quando o carregamento é aplicado na mesa inferior, o efeito da monossimetria predomina e a carga crítica é maior quando a mesa inferior comprimida é a maior, isto é  $k > 0$  e portanto  $C_k < 0$ . Contudo, conforme o ponto de aplicação sobe, o predomínio da monossimetria decresce e para vigas com carregamento na mesa superior a carga crítica é maior quando a mesa superior tracionada for a maior, similar às vigas biapoiadas.

(\*) No caso de vigas biapoiadas, o efeito Wagner pode ser resumidamente explicado da seguinte maneira: A maior distância (maior braço de alavanca) entre a mesa menor e o centro de torção produz uma redução na rigidez à torção quando esta mesa for comprimida e um aumento na rigidez à torção quando for tracionada e a nova rigidez à torção passa a ser:  $G I_t - 2 k M$  (conforme TRAHAIR (1977)), onde  $k$  é o coeficiente de monossimetria e  $M$  é o momento fletor atuante na viga.

Comparativamente, pouco se sabe sobre os efeitos da variação nas condições do carregamento e de apoio na estabilidade lateral das vigas com seção monossimétrica, conforme NETHERCOT, 1983.

A influência da variação do tipo de carregamento no valor de  $C_k$ , foi muito pouco estudada, mas diversos autores e normas como é o caso de MCGUIRE (1968), GALAMBOS (1988), ABNT/NBR 8800/1986, AISI/1986, recomendam, por simplicidade, ado-



tar-se  $C_k = 1,0$ , na presença dos mesmos valores de  $C_b$  indicados no item 5.1, e com carregamento aplicado no centro de torção (esta última restrição não é fornecida nas normas ABNT e AISI, o que pode levar os seus usuários a incorrerem em erro, pois por exemplo vigas em balanço com carregamento na mesa inferior exigiria  $C_k < 0$ ).

CLARK (1962), baseado em um trabalho de PETERSSON, 1952, indica  $C_k = 2.5$  para o caso de vigas simplesmente apoiadas e submetidas a uma força concentrada no meio do vão.

Para outras situações de carregamento não há ainda uma solução geral, sugerindo-se a adoção dos resultados particulares apresentados em ANDERSON; TRAHAIR (1972).

NOTA: Há uma incorreção na apresentação da expressão 5.9 (p. 166) de GALAMBOS (1988), para a determinação do  $M_{cr}$  de vigas com seção monossimétrica. Esta incorreção, que pode ser constatada comparando-a com a eq. 4.3.1 desta Dissertação, é decorrente da tentativa de simplificação de expressão similar apresentada em GALAMBOS (1968) (eq. 3.53. p. 99)

### 5.3.3 Conclusões

- $C_k = 1,0$ , em vigas sem carregamento transversal ou com carregamento aplicado no centro de torção.

-Pouco se sabe sobre o valor de  $C_k$  para vigas com carregamento fora do centro de torção. Neste caso  $C_k > 0$ , exceto para vigas em balanço com carregamento abaixo do

centro de torção, para as quais  $C_k < 0$ .

#### 5.4 COEFICIENTE ASSOCIADO AO TIPO DE VINCULAÇÃO (K)

O coeficiente K está relacionado com a restrição a deslocamentos ou rotações no plano perpendicular ao da flexão sub-crítica.

Apoio simples, nesse plano, significa empenamento livre e tensões nulas nas extremidades consideradas, isto é,  $\theta'(0) \neq 0$ ,  $\theta'(\ell) \neq 0$  e  $\theta''(0) = \theta''(\ell) = 0$ .

Engastamento perfeito, nesse plano, significa empenamento nulo e tensões não nulas nas extremidades consideradas, isto é,  $\theta'(0) = \theta'(\ell) = 0$ ,  $\theta''(0) \neq 0$ ,  $\theta''(\ell) \neq 0$ .

Outra condição de contorno imposta é a do impedimento da rotação por torção nas extremidades consideradas, isto é,  $\theta(0) = \theta(\ell) = 0$ .

É possível determinar o valor de K para as condições acima estabelecidas a partir da eq. 4.3.5 (Clark/Rayleigh) e com a utilização de apenas um termo da expansão em série trigonométrica do ângulo de torção.

Lembrando a eq. 4.3.5:

$$K^2 = \pi^2 \frac{\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz}{\int_0^\ell \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz}$$

## 5.4.1 Apoio simples

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} (\pi Z)$$

$$\frac{d\theta}{dZ} = \theta_m \pi \cos (\pi Z)$$

$$\frac{d^2\theta}{dZ^2} = -\theta_m \pi^2 \operatorname{sen} (\pi Z)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dZ} \right)^2 dZ = (\theta_m \pi)^2 \int_0^1 \cos^2 (\pi Z) dZ = \frac{(\theta_m \pi)^2}{2}$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dZ^2} \right)^2 dZ = (\theta_m \pi^2)^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 (\pi Z) dZ = \frac{(\theta_m \pi^2)^2}{2}$$

A partir da eq. 4.3.5 tem-se:

$$K = 1,0$$

## 5.4.2 Engastamento perfeito

$$\theta = \theta_m \left[ 1 - \cos (2\pi Z) \right]$$

$$\frac{d\theta}{dZ} = \theta_m 2\pi \operatorname{sen} (2\pi Z)$$

$$\frac{d^2\theta}{dZ^2} = \theta_m 4\pi^2 \cos (2\pi Z)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz = (\theta_m 2\pi)^2 \int_0^1 \text{sen}^2 (2\pi z) dz = \frac{(\theta_m 2\pi)^2}{2}$$

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)^2 dz = (\theta_m 4\pi^2)^2 \int_0^1 \text{cos}^2 (2\pi z) dz = \frac{(\theta_m 4\pi^2)^2}{2}$$

A partir da eq. 4.3.5 tem-se:

$$K = 0,5$$

#### 5.4.3 Vigas em balanço

Para a determinação dos valores de  $C_b$  e  $C_p$  (ítems 5.1.5 e 5.2.4) foi adotado  $K = 1,0$  conforme indicação de CLARK (1962). NETHERCOT (1973), indicou outra maneira de se determinar o momento crítico de uma viga, com seção simétrica, em balanço. Neste trabalho, o autor fornece diversos valores para  $K$  em função das condições de vínculo e da posição do carregamento, porém neste caso deve-se adotar  $C_b = 1,0$  e  $C_p = 0,0$ . A seguir serão transcritos os valores de  $K$  para o caso da viga em balanço totalmente engastada em uma das extremidades e totalmente livre na outra.

Força concentrada na extremidade livre:

carregamento no centro de torção :  $K = 0,75$

carregamento na mesa superior :  $K = 1,40$

Carregamento uniformemente distribuído:

carregamento no centro de torção :  $K = 0,50$

carregamento na mesa superior :  $K = 1,00$

NETHERCOT (1983) e GALAMBOS (1988), baseados no trabalho citado, recomendam, a favor da segurança, alguns valores de  $K$  para uso expedito em projeto.

#### 5.4.4 Conclusões

-O valor do coeficiente  $K$  está relacionado com as restrições às rotações nos planos perpendiculares ao da flexão sub-crítica.

- $K = 1,0$  no caso de vigas simplesmente apoiadas nesse plano e  $K = 0,5$  no caso das vigas com engastamento perfeito nesse plano.

-No caso das vigas em balanço,  $K = 1,0$  para o critério de cálculo estabelecido neste trabalho. Outros valores de  $K$  podem ser adotados, mas devem respeitar os critérios estabelecidos pelos autores que os fornecem.

## 6 MOMENTO CRÍTICO DE VIGAS COM SEÇÃO QUALQUER SUBMETIDAS A MOMENTO CONSTANTE (GOODIER/TIMOSHENKO)

Em GOODIER (1942), é deduzida a expressão para o cálculo do momento crítico à flambagem lateral de vigas com seção qualquer, submetidas a momento fletor constante, ou seja, uma barra sujeita a momentos iguais em ambas as extremidades.

A dedução de Goodier parte de hipóteses similares às aquelas citadas no item 4.1, exceto, evidentemente, no que se refere à monossimetria da seção, porém percorre um caminho diferente daquele escolhido para esta Dissertação.

TIMOSHENKO; GERE (1961) (capítulo 5 desse livro), também apresentam esta dedução, seguindo um caminho similar àquele escolhido por Goodier, porém de forma mais clara.

A sequência desta dedução, conforme Timoshenko, é apresentada a seguir:

a) Determinação das equações diferenciais que governam o fenômeno

$$EI_y u'''' = q$$

$$GI_t \theta'' - EC_w \theta'''' = m_t$$

Onde  $q$  e  $m_t$  são respectivamente a força lateral fictícia e o momento torsor por unidade de comprimento que surgem após a

flambagem, dentro das hipóteses adotadas.

b) Determinação de  $q$  e  $m_t$  por analogia à dedução, feita por Timoshenko, para o caso da flambagem por torção (curiosa associação entre flambagem por flexão de chapas e flambagem por torção de barras com seção cruciforme e axialmente comprimidas).

$$q = - M \theta''$$

$$m_t = - M u'' - 2 M k \theta''$$

c) Solução do sistema de equações diferenciais a partir da substituição de  $u$  e  $\theta$  por funções trigonométricas

$$u = A_1 \operatorname{sen} (\pi z / \ell)$$

$$\theta = A_2 \operatorname{sen} (\pi z / \ell)$$

Resolvido o sistema resulta:

$$M_{cr} = - \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} + \sqrt{\left( \frac{\pi^2 EI_y k}{\ell^2} \right) + \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \left( GI_t + EC_w \frac{\pi^2}{\ell^2} \right)}$$

Esta é a expressão (5-84) apresentada em TIMOSHENKO (1961).

O mesmo resultado é encontrado a partir do desenvolvimento da expressão [14] de GOODIER (1942).

Rearranjando-se resulta:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \left[ -k + \sqrt{k^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{\pi^2}{\ell^2} \right)} \right]$$

Comparando-se esta expressão com a eq. 4.3.1 conclui-se que, dentro das hipóteses adotadas, o valor de  $M_{cr}$  de uma viga com seção monossimétrica, submetida a momento fletor constante, coincide com o calculado para uma viga com seção qualquer (com  $C_b = C_k = K = 1$  e  $C_p = 0$ ). Não há razão para se generalizar esta interessante conclusão para o caso de outros tipos de carregamento ou vinculação, casos estes para os quais não se conhece solução analítica.

No entanto a eq. 4.3.1, com  $C_k = C_p = 0$ , ou seja, a mesma expressão para o cálculo do momento crítico para seções duplamente simétricas em forma "I", na prática, é utilizada para o caso de seções monossimétricas em forma de "U" fletidas na direção perpendicular ao eixo de simetria, e com carregamento aplicado no centro de torção (ou fora dele, mas com um sistema de travamentos suficiente para tornar possível desprezar-se o momento torsor aplicado), conforme JOHNSTON (1976), SALMON; JOHNSON (1980), NETHERCOT (1983), GALAMBOS (1988), AISI/86, NBR 8800/86.



## 7 RECOMENDAÇÕES DE NORMAS

O momento crítico à flambagem lateral de vigas de aço em regime elástico-linear pode ser determinado a partir da equação geral eq. 4.3.1 com o auxílio dos valores dos coeficientes fornecidos no capítulo 6. Neste capítulo se fará uma comparação entre o formulário simplificado constante na norma brasileira e normas americanas que tratam deste assunto e aquele apresentado no capítulo 4.

As normas escolhidas para esta comparação são as seguintes:

"Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design" editado pelo American Institute of Steel Construction em 1986 . Na realidade não é uma norma americana, apesar de ser usada como tal, mas sim, uma recomendação do referido Instituto, internacionalmente respeitado. Baseia-se no Método dos Estados Limites e é dirigida para estruturas de aço formadas por perfis laminados (principalmente) ou perfis soldados (vide ANEXO A-4). Será denominada simplifcadamente AISC/LRFD/86.

"Cold Formed Steel Design Manual" editado pelo American Iron and Steel Institute em 1986 . Da mesma forma que a anterior não se trata realmente de uma norma, mas uma recomendação do

referido instituto. Baseia-se ainda no Método das Tensões Admissíveis, porém com um formulário já adequado a uma próxima edição baseada no Método dos Estados Limites. É dirigida exclusivamente para estruturas de aço compostas por perfis formados a frio (vide ANEXO A-4). Será denominada simplifcadamente de AISI/86.

"Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Procedimento" - elaborada pela ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas e registrada no INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial sob a designação NBR 8800, editada em 1986 e com errata publicada em 1988. Baseia-se no Método dos Estados Limites e é dirigida para estruturas de aço compostas de perfis soldados ou laminados. Será denominada simplifcadamente NBR 8800/86.

Nos itens seguintes serão deduzidas as expressões indicadas nas normas NBR 8800/86, AISC/LRFD/86 e AISI/86, para o determinação do momento crítico ( $M_{cr}$ ) à flambagem lateral, de vigas de aço, em regime elástico-linear e serão apresentadas as restrições para o seu uso.

### 7.1 AISC/LRFD/86

A dedução da expressão recomendada pelo AISC/LRFD/86, para o cálculo do momento crítico à flambagem lateral, pode ser conseguida a partir da eq. 4.3.1, admitindo-se  $\bar{c}_p = \bar{c}_k = 0$  e  $K = 1,0$  resultando:

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{\ell^2}{\pi^2} \right)}$$

Rearranjando tem-se:

$$M_{cr} = \frac{C_b \pi}{\ell} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{\pi E}{\ell}\right)^2 I_y C_w}$$

Que é a expressão recomendada pelo AISC/LRFD/86, com:

$$C_b = 1,75 - 1,05 r + 0,3 r^2 \leq 2,30$$

sendo:

$$r = \frac{M_1}{M_2}$$

onde  $M_1 < M_2$  são os momentos aplicados nas extremidades do trecho de viga considerado.

Assim sendo, as recomendações do AISC/LRFD/86 apresentam as seguintes restrições:

- A viga deve possuir seção duplamente simétrica.
- As vinculações são consideradas apoios simples, desprezando-se a contribuição de eventuais engastamentos.
- A norma se omite quanto à influência da posição do carregamento, na determinação do valor de  $M_{cr}$ , ou seja, sobre o efeito desfavorável da presença de esforços aplicados acima

- do centro de torção e sobre o efeito favorável da aplicação de esforços abaixo do centro de torção.
- O diagrama de momentos fletores deve ter variação linear entre os pontos travados lateralmente, isto é, admite-se que não haja carregamento transversal ao longo de trecho de viga considerado, apesar de ser permitida a utilização do mesmo formulário quando, na presença de carregamento transversal, o diagrama se apresentar aproximadamente linear. Esta aproximação é válida para o caso do carregamento ser distribuído, porém não há comprovação teórica no caso de presença de cargas concentradas aplicadas acima do centro de torção.
  - No caso do diagrama de momentos não ser aproximadamente linear, deve ser utilizado  $C_b = 1,0$ , ou seja admite-se que a viga esteja submetida a momento constante e igual ao máximo momento fletor atuante no trecho considerado, desprezando-se o efeito favorável da presença do carregamento transversal.

## 7.2 AISI/86

A dedução da expressão recomendada pelo AISI/86, para o cálculo do momento crítico à flambagem lateral, pode ser conseguida a partir da eq. 4.3.1 admitindo-se  $C_p = 0$  e  $C_k = 1,0$ , resultando:

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi EI_y}{(K\ell)^2} \left[ -k + \sqrt{k^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{(K\ell)^2}{\pi^2} \right)} \right]$$

Rearranjando-se resulta:

$$M_{cr} = C_b A \sigma_y \left[ -k + \sqrt{k^2 + r_0^2 (\sigma_t / \sigma_y)} \right]$$

Que é a expressão recomendada pelo AISI/86, onde:

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 E}{(Kl / r_y)^2} \quad \sigma_t = \frac{1}{A r_0^2} \left[ GI_t + \frac{\pi^2 EC_w}{(Kl)^2} \right]$$

As expressões de  $\sigma_y$  e  $\sigma_t$  aqui apresentadas estão simplificadas em relação às indicadas no AISI/86. Admite-se aqui que  $K_t \ell_t = K_y \ell_y = Kl$ , sendo:  $K_t \ell_t$  e  $K_y \ell_y$ , respectivamente, os comprimentos de flambagem relativos à torção e à flexão no plano perpendicular ao eixo y

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + y_c^2}$$

Analisando-se o formulário acima nota-se que este termo pode ser cancelado.

$$C_b = \frac{1}{0,6 + 0,4 r}$$

Esta expressão para o cálculo de  $C_b$  apresenta resultados ligeiramente menores do que aqueles calculados pela expressão

recomendada pelo AISC/LRFD/86, para  $-0,5 \leq r \leq 1,0$ , fornecendo valores contra a segurança fora desse intervalo. Sugere-se que também neste caso deve ser imposto o limite  $C_b \leq 2,3$ . TRAHAIR (1977) sugere  $C_b \leq 2,5$ .

A norma recomenda o uso da mesma expressão citada, com  $k = 0$ , para o caso de vigas com seção monossimétrica em forma de "U", fletidas no plano perpendicular ao eixo de simetria. Não há comprovação teórica para esta aproximação (vide cap. 6).

Assim sendo as recomendações do AISI/86 são menos restritivas do que as do AISC/LRFD/86, mantendo-se porém as observações referentes ao ponto de aplicação dos esforços e a presença de carregamento transversal.

### 7.3 NBR 8800/86

A dedução da expressão recomendada pela NBR 8800/86, para o cálculo do momento crítico à flambagem lateral de uma viga com seção monossimétrica em forma de "I", pode ser conseguida a partir da eq. 4.3.1, admitindo-se:  $\phi_p = 0$ ,  $C_k = 1,0$  e  $K = 1,0$ , resultando:

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \left[ -k + \sqrt{k^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{L^2}{\pi^2} \right)} \right]$$

Rearranjando-se resulta:

$$M_n = \frac{C_b \pi^2 EA k}{(\ell/r_y)^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{GI_t}{\pi^2 EA k^2} + \frac{C_w}{\ell^2 k^2 A} \right) \left( \frac{\ell}{r_y} \right)^2} \right]$$

que é uma das expressões apresentadas na NBR 8800/86.

Outras expressões são apresentadas para outras seções tais como: seção retangular, "T", "I" duplamente simétrico, "U" monossimétrico (vale a mesma observação feita em relação à recomendação do AISI), etc. mas sempre dentro das mesmas hipóteses, assim sendo, as restrições para o uso das expressões recomendadas pela NBR 8800/86 são as mesmas indicadas no item referente ao AISC/86, exceto quanto à simetria da seção.

#### 7.4 MOMENTO FLETOR LIMITE PARA FLAMBAGEM ELÁSTICA

Esta Dissertação trata de flambagem lateral de vigas em regime elástico, ou seja não é permitida a plastificação parcial da seção. Algebricamente pode-se indicar que o limite entre regime elástico e inelástico se dá para  $M_r = (f_y - f_r) W$ , onde:

$M_r$  - momento fletor limite para flambagem elástica

$W$  - módulo elástico de resistência

$f_r$  - tensão residual = 115 MPa (vide ANEXO A)

$f_y$  - limite de escoamento do material

$(f_y - f_r)$  - corresponde ao limite de proporcionalidade do material

Nota : outro limite importante é o  $M_{pl} = f_y Z$  onde:

$M_{pl}$  - máximo momento que pode ser aplicado à seção considerada

$Z$  - módulo plástico de resistência  $M_{pe} \leq 1,25 \frac{A}{\gamma} W$

Nota : Para efeito de dimensionamento os valores de  $M_r$  e  $M_{pl}$  devem ser afetados por coeficientes de minoração conforme indicação das normas (no caso da NBR 8800/86 os momentos devem ser multiplicados por 0,9).



## 8 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Será feito um exemplo, onde se comparará o valor do  $M_{cr}$  calculado conforme a eq. 4.3.1 e conforme as recomendações da NBR 8800/86 similar ao AISC/LRFD/86, no caso de seções duplamente simétricas).

Para tal será utilizada uma viga biapoiada, sob carregamento uniformemente distribuído, com seção em forma de "I" duplamente simétrico do tipo IS 430 x 175 x 50,2 conforme COSIPA (s.d.) e SILVA (1987) e (1988). Serão considerados também, dois tipos de aços estruturais: COS-AR-COR-500 ( $f_y = 375$  MPa) e ASTM A-36 ou NBR 6648 CG-26 (será por simplicidade adotado  $f_y = 250$  MPa) (vide ANEXO A-3).

Características geométricas (vide fig. 8.1):

$d = 43$ cm	$I_t = 24,47$ cm
$b_f = 17,5$ cm	$I_y = 1117$ cm <sup>4</sup>
$t_f = 1,25$ cm	$C_w = 486\,750,2$ cm <sup>6</sup>
$t_w = 0,50$ cm	$a = d/2 = 21,5$ cm

Características do material:

$$E = 205\,000 \text{ MPa} = 20\,500 \text{ kN/cm}^2 \quad G = E / 2,6$$

$$f_y = 250 \text{ MPa} = 25 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{ou} \quad 375 \text{ MPa} = 37,5 \text{ kN/cm}^2$$

Coeficientes para a eq. 4.3.1:

apoios simples -  $K = 1,0$

carregamento uniformemente distribuído -  $C_b = 1,13$  e  $C_p = 0,45$

seção duplamente simétrica -  $C_k = 0$

Momentos fletores limites calculados (sem minoração conforme norma):

$$M_{pl} = 418 \text{ kN m } (f_y = 375 \text{ MPa}) \quad \text{e} \quad 278 \text{ kN m } (f_y = 250 \text{ MPa})$$

$$M_r = 264 \text{ kN m } (f_y = 375 \text{ MPa}) \quad \text{e} \quad 137 \text{ kN m } (f_y = 250 \text{ MPa})$$

$M_{cr}$  conforme tabela abaixo:

comprimento sem travamento	NBR 8800/86	eq. 4.3.1		
		$a = d/2$	$a = 0$	$a = -d/2$
4 m	338	566	382	257
6 m	171	274	193	137
8 m	111	169	125	92
10 m	81	120	92	70

Estes valores podem ser plotados em um diagrama  $M_{cr} \times \ell$  conforme fig. 8.1.

Apesar de ser um único exemplo, cujo resultado ainda poderia ser alterado, dependendo da intensidade do carregamento, devido a limitação por deformação ou a inclusão de contenção lateral, pode-se extrair algumas observações de cunho quantitativo.

a) Existe uma diferença considerável entre os resultados calculados a partir do formulário simplificado da norma brasileira e os calculados com a equação geral. Esta diferença se acentua, como era de se esperar, à medida que a peça se aproxima da região inelástica (por exemplo:  $\ell = 8 \text{ m}$  para  $f_y = 250 \text{ MPa}$  e  $\ell = 6 \text{ m}$  para  $f_y = 375 \text{ MPa}$ ).

Baseando-se nos trabalhos mencionados no capítulo 5, nos quais os diversos autores calculam a carga crítica em função do ponto de aplicação do carregamento e do coeficiente  $\mu = (GI_t/EC_w) l^2$ , pode-se ampliar esta conclusão, isto é, a diferença se acentua não somente para " $l$ " pequeno, mas para " $\mu$ " pequeno. Convém lembrar que conforme NETHERCOT (1972), para perfis laminados e formados a frio comerciais o limite entre região elástica e inelástica se dá para  $\mu \approx 4$ .

Assim sendo, recomenda-se que, quando o valor do momento crítico, calculado com  $C_p = 0$ , estiver próximo do valor de  $M_r$ , ou quando  $\mu$  for pequeno,  $M_{cr}$  seja recalculado levando em conta influência da posição do carregamento .

b)Analisando-se a eq. 4.3.1 que fornece os valores de  $M_{cr}$  poder-se-ia ter a falsa idéia da independência de  $M_{cr}$  em relação ao tipo de aço utilizado, mas deve-se lembrar que tal expressão somente é válida no regime elástico, ou seja, é possível para uma mesma situação estrutural, tal como aquela utilizada no exemplo, para  $l = 6$  m, encontrar-se aços com maior resistência que, ainda no regime elástico, permitam atingir maiores valores de  $M_{cr}$  se comparados com os valores de  $M_{cr}$  calculados, mas no regime inelástico, para as vigas fabricadas com aços convencionais.

Assim sendo recomenda-se que, se necessário, seja feito, um estudo de viabilidade, analisando a possibilidade do uso de aços de alta resistência.

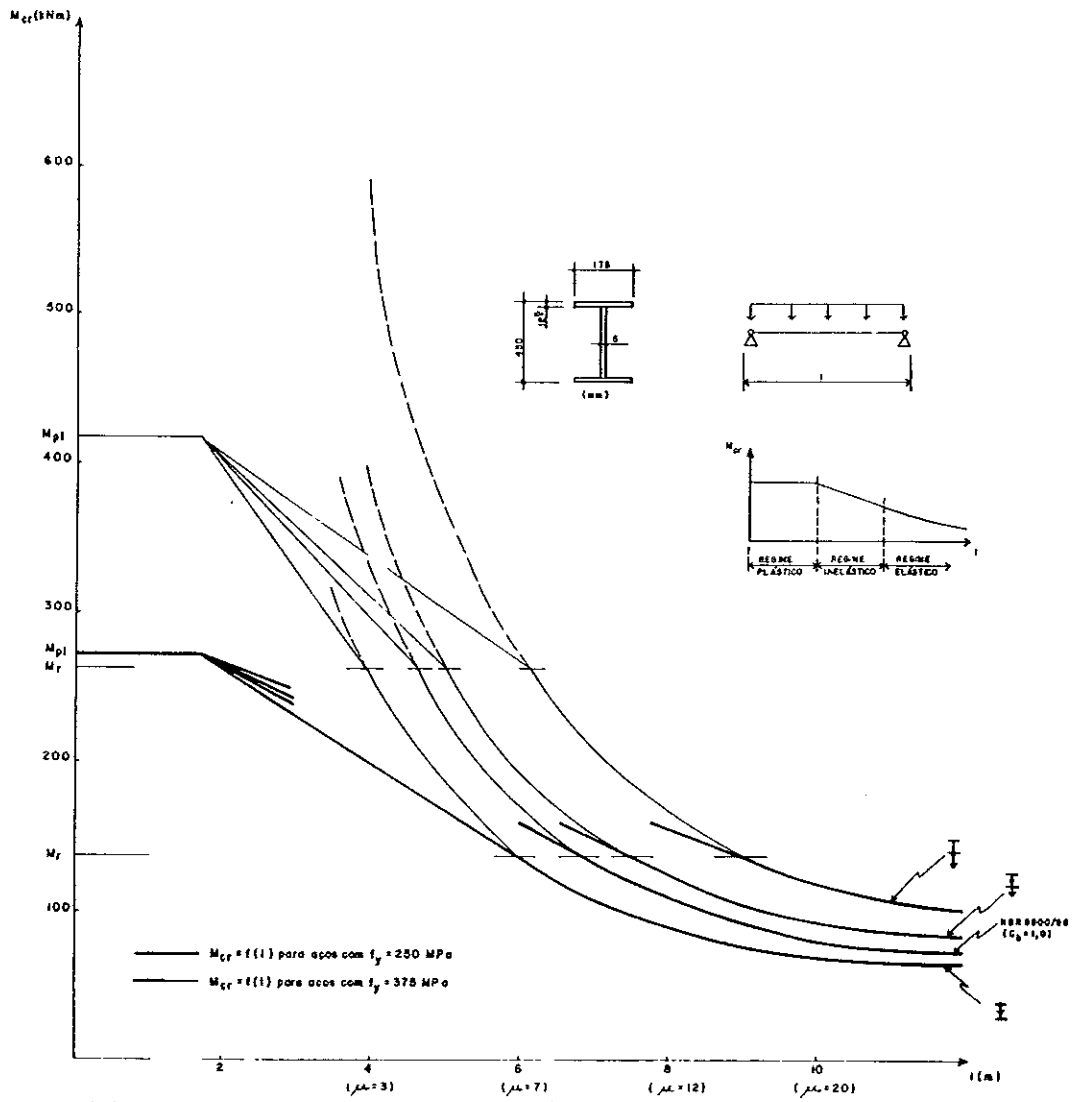


FIG. 8.1

## 9 CONCLUSÕES

As normas de procedimento para execução de projetos têm por objetivo padronizar e simplificar o trabalho do engenheiro na elaboração do projeto.

Para atingir tal objetivo, a normalização é feita sobre os casos particulares mais frequentes, generalizando-os, causando limitações, nem sempre claramente expressas, no uso do formulário contido nas normas, cabendo ao engenheiro investigar quais são elas a fim de não incorrer em falhas no projeto. O intuito do autor, ao elaborar esta Dissertação, foi o de localizar tais limitações, dentro do tema escolhido, esclarecê-las e apresentar alternativas para o dimensionamento.

As normas adotadas como referência para esta Dissertação, ou seja, NBR 8800/86, AISC/LRFD/86 e AISI/86, apresentam expressões para o cálculo do momento crítico à flambagem lateral, em regime elástico, para vigas de aço, com diversas limitações de uso, nem sempre devidamente esclarecidas, resumidas a seguir:

-A viga deve ter seção duplamente simétrica (AISC) ou monossimétrica (NBR 8800 e AISI), sendo que neste último caso não se deve estender o uso do formulário às vigas em balanço.

*com correção para as condições de contorno*

*para as vigas em balanço e de apoio móvel, o momento crítico*

*é dado por:*

- As vinculações são consideradas apoios simples, desprezando-se a contribuição de eventuais engastamentos (NBR 8800 e AISC).
  
- As normas omitem-se quanto à influência da posição do carregamento, na determinação do valor de  $M_{cr}$ , ou seja, sobre o efeito desfavorável da presença de esforços aplicados acima do centro de torção e sobre o efeito favorável da aplicação de esforços abaixo do centro de torção.
  
- O diagrama de momentos fletores é considerado como tendo variação linear entre os pontos travados lateralmente, isto é, admite-se que não haja carregamento transversal ao longo de trecho de viga considerado, apesar de ser permitida a utilização do mesmo formulário quando, na presença de carregamento transversal, o diagrama se apresentar aproximadamente linear. Esta aproximação é válida para o caso do carregamento ser distribuído, porém não há comprovação teórica no caso da presença de cargas concentradas aplicadas acima do centro de torção.
  
- No caso do diagrama de momentos não ser aproximadamente linear, deve ser utilizado  $C_b = 1,0$ , ou seja, admite-se que a viga esteja submetida a momento constante e igual ao máximo momento fletor atuante no trecho considerado, desprezando-se o efeito favorável da presença do carregamento transversal.

-As normas estendem o uso do formulário adequado a vigas com seção duplamente simétrica em forma de "I" , para o caso de vigas com seção monossimétrica em forma de "U" fletidas no plano perpendicular ao eixo de simetria, simplificação esta que, apesar de corroborada por diversas bibliografias, não apresenta comprovação teórica.

-As extremidades do trecho de viga em estudo devem ter sempre impedimento ao deslocamento lateral e à rotação por torção, exceto no caso da extremidade livre de vigas em balanço, submetidas a carga concentrada nessa extremidade ou carregamento uniformemente distribuído.

As limitações acima descritas foram analisadas com o auxílio dos trabalhos de diversos autores, e resumidamente pode-se concluir que, em algumas situações estruturais, os valores do momento crítico calculados de forma adequada, diferem substancialmente dos recomendados pelas normas citadas.

O valor do momento crítico normalizado pode ser muito inferior ao valor exato, portanto situação de insegurança, nos seguintes casos:

-vigas com baixos valores de  $\mu = (GI_t/EC_w)\ell^2$  e com carregamento aplicado acima do centro de torção.

-vigas em balanço com carga concentrada aplicada acima do

centro de torção.

O valor do momento crítico normalizado pode ser muito superior ao valor exato, portanto situação anti-econômica, nos seguintes casos:

-vigas com baixos valores de  $\mu$  e com carregamento aplicado abaixo do centro de torção.

-vigas em balanço com carregamento aplicado no centro de torção ou abaixo deste.

-vigas cujos apoios são engastados.

-outras vigas cujo diagrama de momentos fletores não seja linear (uma única reta) entre os pontos travados lateralmente.

Nesta Dissertação é deduzida a equação geral para o cálculo do valor do momento crítico à flambagem lateral de vigas de aço com seção monossimétrica, da qual resulta o formulário normalizado, e são determinados valores adequados, dentro das hipóteses indicadas, ao cálculo do momento crítico para as situações acima mencionadas e para aquelas normalizadas.



No ANEXO C, é apresentada uma tabela resumo, simplificada, contendo as conclusões numéricas deste trabalho, que, quando comparada com outras tabelas similares apresentadas em diversas publicações, apresenta algumas alterações, citadas a seguir.

-inclusão dos coeficientes para determinação do momento crítico de vigas submetidas a duas cargas concentradas.

-inclusão dos coeficientes para a determinação do momento crítico de vigas com travamento lateral, central e rígido, submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

-alteração do coeficiente associado ao diagrama de momentos fletores ( $C_b$ ), adequando-o aos casos mais frequentes, ou seja,  $\mu \leq 40$ , para o caso das vigas em balanço, permitindo assim um aumento da carga crítica.

-inclusão do coeficiente associado à posição do carregamento ( $C_p$ ), para o caso das vigas em balanço, submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

-alteração do coeficiente  $C_p$ , para o caso das vigas em balanço submetidas a carga concentrada, causando redução da carga crítica.

## ANEXO A - O AÇO PARA ESTRUTURAS METÁLICAS

A indústria siderúrgica, a partir do minério de ferro, carvão e outras matérias-primas e insumos, produz o aço, que tornou-se um dos materiais essenciais da economia moderna. Pode-se dizer que o desenvolvimento de um país mede-se pelo consumo "per-capita" de aço.

Os produtos siderúrgicos sob forma de chapas, perfis, barras, tubos, etc. são largamente aplicados na indústria automobilística, eletro-eletrônica, naval, mecânica e nos países mais desenvolvidos na construção civil.

A construção civil brasileira, que no passado adotou o aço em algumas obras importantes, posteriormente passou a utilizá-lo apenas em instalações industriais e torres de transmissão. Atualmente está havendo uma mudança na conservadora área da construção civil nacional com o surgimento, embora ainda incipiente, do uso de estruturas metálicas em edifícios de múltiplos andares, edifícios sociais, pontes, viadutos, estações ferroviárias e rodoviárias.

O mercado do aço, dirigido à construção civil, pode ser simplificadaamente apresentado da seguinte maneira: o aço é fabricado pelas siderúrgicas e é vendido, principalmente sob forma de chapas (material produzido, exclusivamente, pelas três maiores siderúrgicas nacionais: Companhia Siderúrgica

Paulista - COSIPA, Usina Siderúrgica de Minas Gerais - USIMINAS, Companhia Siderúrgica Nacional - CSN), às fábricas de estruturas metálicas, indústrias, onde a partir de operações, tais como: corte, soldagem, dobramento, furação, etc., tornam o produto siderúrgico aplicável na construção metálica sob forma de perfis (vigas e pilares) conectáveis.

Outro produto siderúrgico de importância para a construção civil seria o perfil laminado, porém, apenas algumas siderúrgicas de pequeno e médio porte podem fornecer tais perfis e com pequenas dimensões. A CSN, capaz de fabricar perfis com maiores dimensões, tem sua produção irregular, limitada e com tendência à paralização. A siderúrgica Aço Minas Gerais - AÇOMINAS foi projetada para suprir o mercado com perfis adequados ao uso na construção civil, porém, sua linha de laminação ainda não entrou em operação.

Assim sendo, na falta de perfis metálicos em quantidade suficiente, os fabricantes de estruturas metálicas, criam seus próprios perfis a partir da soldagem das chapas (perfis soldados) ou do seu dobramento (perfis formados a frio).

A seguir será resumido o fluxo do processo de fabricação do material aço e indicados os tipos de aços e perfis adequados ao uso na construção civil. Este Anexo está baseado em CARDOSO, MESSAROS e SILVA (1988a), (1988b), (1988c), (1988d) e SILVA (1989a) e (1989b).

## A.1 PROCESSO SIDERÚRGICO

O aço pode ser definido, de maneira sucinta, como uma liga metálica composta principalmente de ferro, contendo pequenas quantidades de carbono, o que lhe confere propriedades específicas, sobretudo de resistência e ductilidade, bastante exploráveis na Engenharia Civil.

A obtenção do aço, na forma de chapas, perfis e bobinas (chapas finas enroladas em torno de um eixo), a partir do minério de ferro e carvão, decorre de uma série de operações de transformação metalúrgica e de conformação mecânica.

Em linhas gerais, a fabricação do aço compreende o aproveitamento do ferro, contido no minério de ferro, pela eliminação progressiva das impurezas deste último. Na forma líquida, já isento das impurezas do minério, o aço recebe adições que lhe confere as características desejadas, sendo então solidificado e trabalhado para a forma requerida.

Pode-se resumir o processo de fabricação do aço em quatro grandes etapas (ver fig. A.1):

- preparo das matérias-primas (Coqueria e Sinterização)
- produção de gusa (Alto-forno)
- produção de aço (Aciaria e Lingotamento)
- conformação mecânica (Laminação)

As principais matérias-primas envolvidas na fabricação do aço,

nas grandes siderúrgicas, são o minério de ferro (principalmente a hematita) e o carvão mineral, que não são encontradas puros, sendo acompanhados de elementos indesejáveis ao processo. O preparo prévio das matérias-primas tem por objetivo aumentar a eficiência dos alto-fornos e aciarias, bem como reduzir o consumo de energia.

O carvão utilizado nos alto-fornos deve fornecer energia térmica e química necessária ao desenvolvimento do processo de redução (produção de gusa) e ainda assegurar uma permeabilidade adequada à carga do alto-forno. A eliminação das impurezas é realizada em uma bateria de fornos denominada COQUERIA, e o produto resultante, o coque, composto basicamente de carbono, deve possuir elevada resistência mecânica, alto ponto de fusão e boa porosidade.

A preparação do minério de ferro para a redução é o mais importante aperfeiçoamento do alto-forno moderno, pois deve haver um cuidado especial com a granulometria da carga a ser nele colocada, uma vez que a velocidade com que o ar pode entrar para executar a combustão é proporcional à permeabilidade do meio. Aos finos de minério são adicionados fundentes e coque, o conjunto é depositado em uma grelha móvel, que passa por um forno a fim de fundir a mistura, segue-se um processo de resfriamento e britagem a fim de que o material atinja a granulometria adequada. Tal processo de aglomeração é denominado SINTERIZAÇÃO e o produto final é o sinter que possui uma dimensão superior a 5 mm. Em decorrência de suas características combustíveis e de permeabilidade tornou-se

mais importante ao processo do que o próprio minério de ferro. Nos ALTO-FORNOS se obtém, a partir do minério de ferro, o GUSA líquido. Esta operação é chamada de redução. O princípio geral de um alto-forno é a retirada do oxigênio do minério, que assim é reduzido a ferro. Esta redução é resultante da combinação do carbono presente no coque com o oxigênio do minério, simultaneamente, a combustão do carvão com o oxigênio do ar fornece calor para fundir o metal reduzido. O alto-forno, enorme cuba com 50m a 100m de altura é alimentado pela boca superior e sua carga é formada principalmente por sinter, coque e minério de ferro. O ar necessário para a queima do coque é injetado sob pressão, previamente aquecido, através de tubos (ventaneiras) localizados na região inferior de forno. Os gases resultantes da combustão atravessam, no sentido ascendente, as camadas de minério e coque, que devem possuir permeabilidade adequada, até seu topo. O gusa líquido "vazado" do alto-forno é transportado em vagões refratários, denominados carros-torpedo, para a aciaria onde será transformado em aço.

O gusa ainda possui vários elementos indesejáveis ao processo e à composição química adequada do aço. Há necessidade, ainda, da redução dos teores destes elementos, o que é feito através da operação de refino, na unidade industrial denominada ACIARIA.

As grandes usinas siderúrgicas brasileiras se utilizam do processo Linz-Donawitz (LD), que usa a adição de oxigênio gasoso (soprado através de uma lança nas enormes painéis de

até 200t para onde foi transferido o gusa) para conseguir a oxidação dos elementos indesejáveis e presentes no gusa, que são eliminados ou sob forma gasosa ou de escória que, devido à diferença de densidade, é facilmente removida do material fundido. É durante este processo de refino, com o adequação da composição química do material (retirada de elementos indesejáveis e inclusão de eventuais elementos de liga), que se obtém o AÇO com as qualidades químicas e mecânicas desejadas e com características apropriadas à conformação mecânica posterior.

O aço líquido deve ser solidificado em formatos que permitam o tratamento mecânico a fim de se obter o produto laminado final. Tais formatos podem ser o de lingotes (obtidos pelo "vazamento" do aço líquido em formas de ferro fundido, em forma de tronco de prisma, na operação conhecida como LINGOTAMENTO CONVENCIONAL) ou de placas (o aço é "vazado" em uma máquina, em forma de escorregador, na operação conhecida como LINGOTAMENTO CONTÍNUO).

A fase seguinte do processo é o da LAMINAÇÃO, que consiste na redução da área da seção, com conseqüente alongamento do produto recebido do lingotamento (lingote ou placa), a fim de conformá-lo na forma desejada (chapas grossas ou finas, perfis, etc.). A laminação de uma placa (se a origem for lingote, este sofre uma laminação primária para transformá-lo em placa) consiste em pré-aquecimento e posterior deformação, através da passagem entre diversos cilindros, pertencentes aos chamados laminadores que, mediante pressão, reduzem a

espessura da placa até aquela desejada para a comercialização. Denomina-se chapa a placa que sofreu redução de espessura por laminação. Dependendo da espessura das chapas estas podem ser fornecidas sob forma de bobinas, mas este acondicionamento pode não ser adequado ao uso em perfis soldados, pois as chapas têm a tendência de retornar à sua posição deformada na bobina, por ocasião da soldagem dos perfis.

## A.2 TENSÕES RESIDUAIS

As diferentes velocidades de resfriamento, após a laminação, conforme o grau de exposição, da chapa ou perfil laminado, levam ao aparecimento de tensões que permanecem nos laminados, recebendo o nome de tensões residuais ( $f_r$ ). Em chapas, por exemplo, as extremidades resfriaram-se mais rapidamente que a região central, contraindo-se; quando a região central da chapa resfria-se, as extremidades, já solidificadas, impedem esta região de contrair-se livremente. Assim, as tensões residuais são de tração na região central e de compressão nas bordas.

Estas tensões são sempre normais à seção transversal das chapas e, evidentemente, tem resultante nula na seção.

As operações executadas, posteriormente, nas fábricas de estruturas metálicas envolvendo aquecimento e resfriamento (soldagem, corte com maçarico, etc.) também provocam o surgimento de tensões residuais, como é o caso dos perfis soldados onde, nas regiões adjacentes aos cordões de solda, per-



maneçam tensões longitudinais de tração após o resfriamento. A presença de tensões residuais faz com que a seção comece a plastificar-se progressivamente, antes que a peça atinja a sua carga de plastificação.

Por simplicidade, a norma NBR 8800/86, baseada no AISC/LRFD/86 indica um valor único a ser adotado para a tensão residual,  $f_r = 115$  MPa.

### A.3 TIPOS DE AÇOS

É na aciaria que fica definido o tipo de aço, a partir da adequação de sua composição química e podem ser classificados em:

- aços-carbono: são aqueles que não contém elementos de liga, podendo ainda serem divididos em baixo, médio e alto carbono, sendo os de baixo carbono ( $C \leq 0,30\%$ ) os mais adequados à construção civil.
- aços de alta resistência e baixa liga sem tratamento térmico: são aqueles com  $f_y \geq 300$  MPa e que recebem elementos de liga, com teor inferior a 2%, suficientes para adquirirem maior resistência mecânica ou resistência à corrosão. São adequados à utilização na construção civil, fazendo-se necessária uma análise econômica comparativa com os aços-carbono, pois estes de menor resistência possuem também custo unitário menor.
- aços de alta resistência e baixa liga tratados termicamente: são aqueles que além de possuírem em sua constituição

os elementos de liga com teor inferior a 2%, recebem um tratamento térmico especial, posterior à laminação, necessário para adquirirem altas resistências mecânicas ( $f_y \cong 700$  MPa) e sua aplicação está restrita a tanques, vasos de pressão, dutos forçados, ou onde os elevados esforços justificarem economicamente sua utilização.

Os vários tipos de aços estruturais são especificados em normas brasileiras e internacionais ou normas elaboradas pelas próprias siderúrgicas.

As normas de dimensionamento (NBR 8800/86, AISC/LRFD/86, AISI/86), fornecem diversos tipos de aços que podem ser especificados nos projetos estruturais. Serão destacados os principais deles:

#### AÇOS-CARBONO:

ASTM A-36, o aço mais utilizado na fabricação de perfis soldados ou laminados, especificado pela American Society for Testings and Materials;

NBR 6648/CG-26 o aço, especificado pela ABNT, utilizado na fabricação de perfis soldados e que mais se assemelha ao anterior;

NBR 7007/MR-250, aço para a fabricação de perfis laminados, que mais se assemelha ao ASTM A-36;

ASTM A-570, o aço mais utilizado na fabricação de perfis formados a frio;

NBR 6650/CF-26 o aço especificado pela ABNT, utilizado na fabricação de perfis formados a frio, que mais se assemelha ao anterior.

A seguir são fornecidos os valores dos limites de escoamento ( $f_y$ ) e resistência ( $f_u$ ) destes aços.

Tipo do aço	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)
ASTM A-36	250	400
ASTM A-570/6036	250	365
NBR 6648/CG-26	255*	410*
	245**	410**
NBR 6650/CF26	260	410
NBR 7007/MR-250	250	400

\* válido para espessuras  $t \leq 16$  mm

\*\* válido para espessuras  $16 < t \leq 40$  mm

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA E BAIXA LIGA SEM TRATAMENTO TÉRMICO:  
 COS-AR-COR 500, o mais utilizado, em São Paulo, especificado por norma da COSIPA;  
 SAC-50, especificado pela USIMINAS;  
 NIOCOR, especificado pela CSN.

Todos eles com alta resistência mecânica\* e não incluídos na NBR 8800/86. A seguir são fornecidos os valores dos limites de escoamento e resistência destes aços.

Tipo de aço	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)
COS-AR-COR 500	375	490
SAC 50	333 a 373	490
NIOCOR	345	485

\* e alta resistência a corrosão atmosférica

Devem ser citados também os aços que apesar de terem alta resistência à corrosão, possuem média resistência mecânica (possuem menor custo unitário que os anteriores):

COS-AR-COR 400, especificado pela COSIPA e SAC 41, especificado pela USIMINAS. A seguir são fornecidos os valores dos limites de escoamento e resistência destes aços.

Tipo de aço	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)
COS-AR-COR 400	250	380
SAC 41	245	402

#### A.4 TIPOS DE PERFIS

Entre os vários componentes de uma estrutura metálica tais como: chapas de ligação, parafusos, chumbadores, conectores e perfis, são estes últimos, evidentemente, os mais importantes para o projeto, fabricação e montagem.

Os perfis de utilização mais corrente são aqueles cuja seção assemelha-se às formas das letras I, H, U e Z, recebendo denominação análoga a essas letras e à letra L, sendo no caso denominados cantoneiras.

Os perfis podem ser obtidos diretamente por laminação ou a partir de operação de conformação a frio ou de soldagem de chapas denominados respectivamente perfis laminados, formados a frio e soldados.

#### A.4.1 Perfis Soldados

Os perfis soldados são largamente empregados na construção de estruturas de aço, em face da grande versatilidade de combinações possíveis de espessuras com alturas e larguras, levando à redução do peso da estrutura, comparativamente com os perfis laminados disponíveis no mercado atualmente.

Eles são produzidos pelos fabricantes de estruturas metálicas a partir do corte e soldagem das chapas fabricadas pelas usinas siderúrgicas. O material de solda, seja a soldagem executada por eletrodo revestido, arco submerso ou qualquer outro tipo, deve ser especificado compatibilizando-o com o tipo de aço a ser soldado, isto é deve ter características similares de resistência mecânica, à corrosão, etc.

A norma NBR 5884 - Perfis Estruturais Soldados de Aço - Padronização, apresenta as características geométricas de uma série de perfis I e H soldados. Outras séries de perfis podem ser encontradas à disposição dos projetistas, reduzindo, por consequência, devido a maiores alternativas de escolha, o peso da estrutura. Cita-se a série apresentada em COSIPA (s.d.).

#### A.4.2 Perfis formados a frio

Os perfis formados a frio, também conhecidos como perfis de chapas dobradas, vêm sendo utilizados de forma crescente na execução de estruturas metálicas leves, pois podem ser projetados para cada aplicação específica, enquanto que os

perfis laminados estão limitados a dimensões pré-determinadas. Dois são os processos de fabricação dos perfis formados a frio: contínuo e descontínuo.

O processo contínuo, adequado à fabricação em série é realizado a partir do deslocamento longitudinal de uma chapa de aço, sobre os roletes de uma linha de perfilação. Os roletes vão conferindo pouco a pouco à chapa a forma definitiva do perfil. Quando o perfil deixa a linha de perfilação, ele é cortado no comprimento indicado no projeto.

O processo contínuo é utilizado por fabricantes especializados em perfis formados a frio.

O processo descontínuo, adequado a pequenas quantidades de perfis, é realizado mediante o emprego de uma prensa dobradeira. A "faca" da dobradeira é prensada contra a chapa de aço, obrigando-a a formar um dobra. Várias operações similares à esta, sobre a mesma chapa, fornecem à seção do perfil a geometria exigida no projeto. O comprimento do perfil, no entanto, está limitado à largura da prensa. Este processo é geralmente utilizado pelos fabricantes de estruturas metálicas.

O dobramento de uma chapa, por qualquer dos dois processos citados, provoca, devido ao fenômeno conhecido como envelhecimento (carregamento até a zona plástica, descarregamento e posterior, porém não imediato, carregamento), um aumento nos limites de escoamento ( $f_y$ ) e resistência ( $f_u$ ), com conseqüente redução de ductilidade. A redução de ductilidade significa menor capacidade do material deformar-se, por esta razão a chapa

deve ser conformada com raio de dobramento adequado ao material e à sua espessura, a fim de evitar o aparecimento de fissuras. Quanto ao aumento de resistência, há normas como o AISI/86, que permitem utilizá-lo no dimensionamento (ver também SILVA (1989a) e (1989b)).

Atenção especial deve ser dada ao cálculo das características geométricas dos perfis formados a frio. A existência da curvatura, no lugar do "ângulo reto" dos perfis laminados, faz com que os valores da área, momento de inércia e módulo resistente possam ser (dependendo das dimensões da seção) sensivelmente reduzidos. A chapa, quando dobrada, sofre uma pequena estrição na região da curvatura; no entanto, para efeito de dimensionamento, tal variação nas dimensões da seção pode ser desconsiderada.

A norma NBR 6355 - Perfis Estruturais de Aço, Formados a Frio - Padronização, estabelece as características geométricas dos perfis estruturais formados com chapas de espessura entre 1,50 mm e 4,75 mm.

Em COSIPA (s.d.) é encontrada a ampliação desta série para chapas até 9,50 mm.

#### **A.4.3 Perfis laminados**

Perfis laminados são aqueles fabricados à quente nas usinas siderúrgicas e seriam os mais adequados a serem utilizados em edificações de estruturas metálicas, pois dispensariam a fabricação "artesanal" dos perfis soldados.

No Brasil, porém, estes perfis são de pequenas dimensões (fabricados por usinas siderúrgicas de pequeno e médio porte) e com características geométricas que trazem algumas dificuldades à construção civil. São os perfis de abas inclinadas, perfis cujas faces internas das mesas não são paralelas às faces externas, dificultando detalhamento e conexões.

Os perfis laminados médios e pesados , são fabricados exclusivamente pela CSN, mas com produção irregular, limitada e com tendência a paralização. Estes últimos, também são de abas inclinadas e com espessura de alma acima dos valores normalmente adequados para o projeto econômico de vigas, por exemplo.

Aguarda-se para breve o início da linha de laminação de perfis da AÇOMINAS, que produzirá perfis estruturais de abas paralelas e com dimensões mais adequadas ao uso na construção civil,



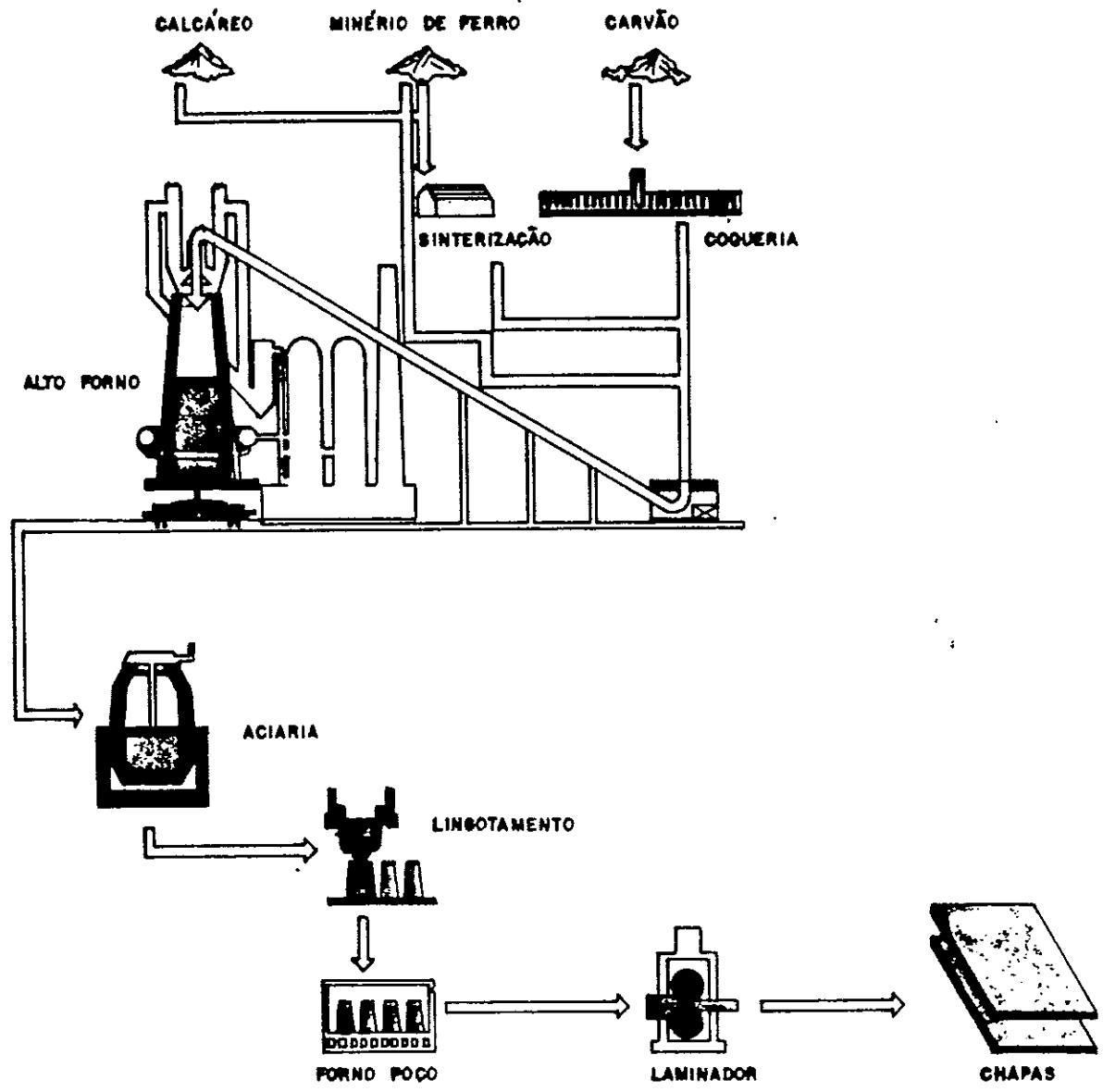


FIG. A.1

ANEXO B - FORMULÁRIO SIMPLIFICADO PARA CÁLCULO DE  
 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE SEÇÕES  
 MONOSSIMÉTRICAS E DE PAREDES DELGADAS

B.1 COEFICIENTE DE MONOSSIMETRIA DE SEÇÕES EM FORMA DE "I"

(k)

$$k = y_c - \frac{1}{2 I_x} \int_A y (x^2 + y^2) dA$$

A integral acima pode ser facilmente calculada lembrando-se que para as mesas, "y" = constante = distância entre o centro de gravidade da seção e a linha média das mesas enquanto a parcela correspondente à alma vale:

$$\int_0^{(h_1 - t_1/2)} y^3 t_w dy - \int_0^{(h_s - t_s/2)} y^3 t_w dy$$

Desenvolvendo-se resulta:

$$k = y_c - \frac{1}{2 I_x} \left\{ h_1 (I_i + A_i h_1^2) - h_s (I_s + A_s h_s^2) + \frac{t_w}{4} \left[ (h_1 - \frac{t_1}{2})^4 - (h_s - \frac{t_s}{2})^4 \right] \right\}$$

Os índices "i" e "s" indicam referência à mesa inferior e mesa superior respectivamente. Deve-se lembrar também que "k" tem o mesmo sinal de "y<sub>c</sub>" e este é positivo quando a mesa inferior é a maior.

Esta expressão é confirmada em TRAHAIR (1977) e NETHERCOT (1983).

A NBR 8800/86 utiliza-se desta expressão, porém despreza os valores de t<sub>i</sub> e t<sub>s</sub> em relação a h<sub>i</sub> e h<sub>s</sub>, respectivamente, nas suas duas ultimas parcelas.

KITIPORNCHAI; TRAHAIR (1980) analisaram 3 000 seções, com  $(I_y/I_x) \leq 0,5$  e concluíram que, com erro inferior a 4 %, o valor de k pode ser calculado, aproximadamente, pela seguinte expressão:

$$k = 0,45 h \left[ 1 - 2 \frac{I_s}{I_y} \right] \left[ 1 - \frac{I_y}{I_x} \right]$$

## B.2 CONSTANTE DE EMPENAMENTO (C<sub>w</sub>)

CLARK (1962) fornece a expressão para cálculo de C<sub>w</sub>, para o caso de seção monossimétrica em forma de "I", que também pode ser encontrada a partir de um rearranjo da expressão fornecida por LANGENDONCK (s.d.), ou seja:

$$C_w = \frac{I_s I_i h^2}{I_y}$$

No caso de seção dupalmente simétrica em forma de "I" tem-se  $I_s = I_i \cong I_y/2$  e assim resulta:

$$C_w = \frac{I_y h^2}{4}$$

No caso de seção monossimétrica em forma de "U", a utilização da aproximação  $C_w = (I_y h^2)/4$ , acarreta um erro máximo de 6%, no cálculo de  $M_{cr}$  (HILL (1954)). Outras fórmulas para o cálculo mais preciso de  $C_w$  podem ser encontradas em: AISI/1986 e LANGENDONCK (s.d.).

### B.3 DISTÂNCIA ENTRE CENTRO DE GRAVIDADE E CENTRO DE TORÇÃO ( $y_c$ )

O valor de  $y_c$  pode ser calculado pela diferença:  $y_{g1} - y_{c1}$  onde  $y_{g1}$  é a distância entre o centro de gravidade e a linha média da mesa inferior e  $y_{c1}$  é a distância entre o centro de torção e a mesma linha.

Rearranjando-se a expressão fornecida em LANGENDONCK (s.d.), resulta, para o caso das seções monossimétricas em forma de "I":

$$y_{c1} = h \left( \frac{I_s}{I_y} \right)$$

onde  $I_s$  é o momento de inércia da mesa superior em relação ao eixo  $y$ .

Assim sendo resulta:

$$Y_c = Y_{g1} - h \left( \frac{I_s}{I_y} \right)$$

#### B.4 MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO ( $I_t$ )

O momento de inércia à torção pode ser calculado como a somatória dos momentos de inércia parciais ( $I_{t_i}$ ) das partes (i) que formam a seção, sendo:

$$I_{t_i} = \psi_i b_i t_i^3$$

O valor do coeficiente  $\psi$  pode ser encontrado em BLODGET (1982) (p. 2.10-2), sendo que  $\psi \rightarrow 0,333$  quando  $t_i/b_i \rightarrow 0$ , (por exemplo: para  $t/b = 1,0$ ,  $\psi = 0,141$  e para  $t/b = 0,1$ ,  $\psi = 0,313$ ) ou calculado aproximadamente pela seguinte expressão fornecida em LANGENDONCK (1960):

$$\psi_i = \frac{1}{3 + 4 (t_i/b_i)^2}$$

No caso de seções de paredes delgadas, isto é  $t_i/b_i$  pequeno é possível adotar-se:

$$I_t = \frac{\sum t_i^3 b_i}{3}$$

## ANEXO C - TABELA RESUMO

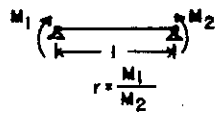
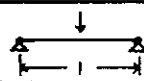
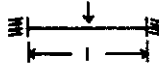
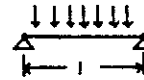
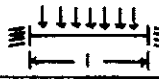
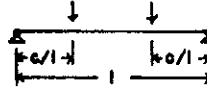

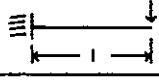
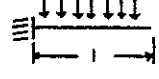
É apresentada a seguir uma tabela resumo dos valores numéricos determinados nesta Dissertação.

Por simplicidade, este resumo limita-se à faixa  $4 \leq \mu \leq 40$ , e alguns valores variáveis, dentro desta faixa, foram, a favor da segurança, admitidos como constantes. Apesar das simplificações inclusas nesta tabela, ainda assim ela se apresenta mais precisa e mais completa que as outras, similares, constantes da bibliografia pesquisada.

Valores mais precisos podem ser encontrados no capítulo 5 desta Dissertação ou nas publicações mencionadas.

Determinação do momento crítico à flambagem lateral de vigas

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi^2 EI_y}{(kl)^2} \left[ -(C_p e + C_k k) + \sqrt{(C_p e + C_k k)^2 + \frac{C_w}{I_y} \left( 1 + \frac{GI_t}{EC_w} \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right)} \right] \quad (1)$$

Tipo de carregamento	Vinculação no plano perpendicular à flexão inicial	K	Coeficientes (2)		
			C <sub>b</sub>	C <sub>p</sub>	
 $r = \frac{M_1}{M_2}$	A (3) E	1,00 0,50			
			r		
			1,0	1,00	0,00
			0,5	1,32	0,00
			0,0	1,82	0,00
-0,5	2,49	0,00			
-1,0	2,50	0,00			
Alternativamente, pode ser utilizada a expressão: $C_b = 1,75 - 1,05r + 0,3r^2 \leq 2,30$					
	A E	1,00 0,50	1,35	0,55	
			1,07	0,42	
	A E	1,00 0,50	1,70	1,42	
			1,04	0,84	
	A E	1,00 0,50	1,13	0,45	
			0,97	0,29	
	A E	1,00 0,50	1,36	1,55	
			0,86	0,82	
 $a/l$	A	1,00			
			0,05	1,00	0,10
			0,10	1,00	0,19
			0,20	1,02	0,36
			0,25	1,04	0,42
			0,30	1,06	0,47
			0,35	1,09	0,52
			0,40	1,17	0,54
			0,45	1,25	0,55
				A	1,00
	E	1,00	1,60	1,50 *	
				0,38 **	
	E	1,00	3,00	1,56 *	
				0,95 **	

\* Máximo valor de C<sub>p</sub> para carregamento aplicado na mesa superior  
 \*\* Mínimo valor de C<sub>p</sub> para carregamento aplicado na mesa inferior

(1) a - Distância entre ponto de aplicação da carga e centro de torção (a > 0 para carga acima do centro de torção)

$$k \approx 0,45 \left[ 1 - \frac{2 I_{ys}}{I_y} \right] \left[ 1 - \frac{I_y}{I_x} \right] h \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{ys} = I_y \text{ da mesa superior} \\ k = 0 \text{ para seções dupl. simétricas} \end{array} \right.$$

c<sub>k</sub> = 1,0 exceto para vigas em balanço

(2) Coeficientes válidos para  $4 \leq \frac{GI_t}{EC_w} l^2 \leq 40$   $C_w \approx \frac{I_{ys} I_y l}{I_y} h^2$

(3) A - Apoio simples E - Engastamento perfeito

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01- ANDERSON, J.M.; TRAHAIR, N.S. Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers, Proceedings, v.98, n.ST 1, p.269. Nova Iorque, ASCE, janeiro de 1972.
- 02- AMERICAN Institute of Steel Constructions. Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design. Chicago, AISC, 1986.
- 03- AMERICAN Iron and Steel Institute. Cold Formed Design Manual. Washington, AISI, 1986.
- 04- ASSOCIAÇÃO Brasileira de Normas Técnicas. Perfis Estruturais de Aço Formados a Frio, Padronização - NBR 6355. Rio de Janeiro, ABNT, 1980.
- 05- ASSOCIAÇÃO Brasileira de Normas Técnicas. Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios, Procedimento - NBR 8800. Rio de Janeiro, ABNT, 1986.
- 06- AUSTIN, W.J.; YEGIAN, S.; TUNG, T.P. Lateral Buckling of Elastically End-Restrained I-Beams, Proceedings, Separate n. 673, v. 81, Nova Iorque, ASCE, 1955.



- 07- BARSOUM, R. S.; GALLAGHER, R.H. Finite Elements Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems, *Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, p. 335. s.l., John Wiley, julho de 1970.
- 08- BLEICH, Friedrich. Buckling Strength of Metal Structures. Nova Iorque, McGraw-Hill, 1952.
- 09- BLODGET, O. W. Design of Welded Structures. Cleveland, J.F.Lincoln Arc Welding Foundation, 1982 .
- 09- BOTELHO, Dirceu L. R. Introdução a Teoria Geral da Estabilidade Elástica. São Paulo, 1978. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- 10- BRASIL, Reyolando M. L. R. Instabilidade Elástica das Estruturas, Notas de aula. São Paulo, EPUSP, 1991.
- 11- CARDOSO, Francisco F.; MESSAROS, Rosa M.; SILVA, Valdir P. O Mercado do Aço. São Paulo, EPUSP/FDTE/COSIPA, 1988a.
- 12- CARDOSO, Francisco F.; MESSAROS, Rosa M.; SILVA, Valdir P. A Fabricação do aço. São Paulo, EPUSP/FDTE/COSIPA, 1988b.

- 13- CARDOSO, Francisco F.; MESSAROS, Rosa M.; SILVA, Valdir P. O Uso do Aço na Construção. In: 40a. Reunião Anual da SBPC, São Paulo, 1988. Anais. São Paulo, EPUSP/FDTE/COSIPA, 1988c.
- 14- CARDOSO, Francisco F.; MESSAROS, Rosa M.; SILVA, Valdir P. O Material Aço. In: 40a. Reunião Anual da SBPC, São Paulo, 1988. Anais. São Paulo, EPUSP-FDTE-COSIPA, 1988d.
- 15- CLARK, J.W.; HILL, H.N. Lateral Buckling of Beams, Transactions, v. 127, parte 2, p. 180. Nova Iorque, ASCE, 1962.
- 16- COSIPA. Tabelas de Características Geométricas e Tabelas para Dimensionamento de Perfis Soldados e Formados de Aço. São Paulo, Companhia Siderúrgica Paulista, s.d.
- 17- DE VRIES, K. Strength of Beams as Determined by Lateral Buckling, Transactions, v. 112, p. 1245, Nova Iorque, ASCE, 1947.
- 18- GALAMBOS, T.V. Structural Members and Frames. Englewood Cliffs (EUA), Prentice Hall, 1968
- 19- GALAMBOS, T.V., ed. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. 3º ed. EUA, John Wiley and Sons, 1988.

- 20- GOODIER, J.N. Torsional and Flexural Buckling of Beams of Thin Walled Open Section under Compressive and Bending Loads, Journal of Applied Mechanics, Transactions, pg. A-103. Nova Iorque, ASME, setembro de 1942.
- 21- HILL, H.N. Lateral Buckling of Channels and Z Beams, Transactions, v. 119, p. 829. Nova Iorque, ASCE, 1954.
- 22- JOHNSTON, B.G. ed. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures 3. ed. EUA, John Wiley and Sons, 1976.
- 23- KERENSKY, O.A.; FLINT, A.R.; BROWN, W.C.B. The Basis for Design of Beams and Plates Girders in the Revised British Standard 153, Proceedings, v. 5, n. 2, Parte III. Londres, Institution of Civil Engineers, agosto de 1958.
- 24- KITIPORNCHAI, S.; TRAHAIR, N.S. Buckling Properties of Monosymmetrics I Beams", Proceedings v. 106, n. ST 5. Nova Iorque, ASCE, maio de 1980.
- 25- LANGENDONCK, Telemaco H. M. Resistência dos Materiais, Deformações-I. Rio de Janeiro, Científica, 1960.
- 26- LANGENDONCK, Telemaco H. M. Resistência dos Materiais, Deformações-II. São Paulo, EDUSP, s.d.

- 27- MASUR, E.F.; MILBRADT, K.P. Collapse Strength of Redundant Beams after Lateral Buckling, Journal of Applied
- 28- MAZZILLI, Carlos E.N. Teoria Geral da Estabilidade, Notas de Aula, São Paulo, EPUSP, 1991.
- 29- MAZZILLI, Carlos E.N. Sobre a Instabilidade de Estruturas Elásticas Sensíveis a Imperfeições. São Paulo, 1979. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica
- 30- McGUIRE, W. Steel Structures. Nova Jersey, Prentice Hall, 1968
- 31- NETHERCOT, D.A.; ROCKEY, K.C. A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams, Engineering Journal. Chicago, AISC, julho de 1972.
- 32- NETHERCOT, D.A. The Effective Lengths of Cantilevers as Governed by Lateral Buckling, The Structures Engineer, v. 51, n. 5, p. 161. Reino Unido, maio de 1973.
- 33- NETHERCOT, D.A. Elastic Lateral Buckling of Beams. In: Beams and Beam-Columns, Stability and Strength, editado por NARAYANAN, R., Londres, Applied Science Publishers, 1983.

- 34- PIMENTA, Paulo M.; MAZZILLI, Carlos E.N. Minima Correctio Methodi Inveniendi Linear Curvas Elasticii. São Paulo, EPUSP, 1986.(Boletim Técnico, PEF 8613).
- 35- PIMENTA, Paulo M. Análise Não-linear de Estruturas I, Notas de Aula, São Paulo, EPUSP, 1991.
- 36- POLEY, S. Lateral Buckling of Cantilevered I-Beams under Uniform Loads, Proceedings, v. 80, separata n. 527. Nova Iorque, ASCE, outubro de 1954.
- 37- POWELL, G.; KLINGNER, R. Elastic Lateral Buckling os Steel Beams, Proceedings, v. 96, n. ST 9, p. 1919. Nova Iorque, ASCE, setembro de 1970.
- 38- SALEEB, A.F.; CHANG, T.Y.P.; GENDY, A.S. effective Modelling of Spacial Assemblages, Accounting for Warping Constraints and Rotation-Dependency of Moments. Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 33, p. 469. John Wiley, fevereiro de 1992.
- 39- SALMON, C.G.; JOHNSON, J.E. Steel Structures design and Behaviour. Nova Iorque, Harper & Row Publishers, 1980.
- 40- SALVADORI, M. G. Lateral Buckling of I-Beams", Transactions, v. 120, p. 1165. Nova Iorque, ASCE, 1955.

- 41- SALVADORI, M.G. Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Transactions , v. 121, p. 1163. Nova Iorque, ASCE, 1956.
- 42- SCHRADER, R.K. Comentários constantes do trabalho de WINTER (1943)
- 43- SILVA, Valdir P.; TRABULSI F., Theóphilo. Perfis Soldados e Perfis Dobrados de Aço - Tabelas de Dimensionamento. In: Seminário Latino Americano Uso do Aço na Construção, Belo Horizonte, 1987. Anais. Belo Horizonte, ILAFA/ABCEM, 1987.
- 44- SILVA, Valdir P. Dimensionamento de Perfis Formados a Frio, conforme AISI 1986. In: 4.º Seminário Uso do Aço na Construção, São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, 1989. Anais. São Paulo, EPUSP-ABCEM, 1989a.
- 45- SILVA, Valdir P. Perfis Formados a Frio, Cubatão, COSIPA (publicação interna), 1989b.
- 46- SILVA, Valdir P.; TRABULSI F., Theóphilo. Dimensionamento de Perfis Soldados à Flexão Simples e Compressão Simples, conforme NBR 8800/86 - Tabelas COSIPA. In: 9.º Encontro Nacional da Construção, São Paulo, 1988. Anais. São Paulo, Instituto de Engenharia, 1988.

- 47- SOUZA LIMA, Victor M. Estudo das Deformações, Notas de Aula, São Paulo, EPUSP, 1959.
- 48- SOUZA LIMA, Victor M.; VENÂNCIO F., Fernando. Considerações sobre a Não-linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas. In: III Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de Computação Científica (CNPq), Rio de Janeiro, 1982.
- 49- SOUZA LIMA, Victor M.; VENÂNCIO F., Fernando. A Noção de Rigidez Tangente no Estudo da Não-linearidade Geométrica de Estruturas Reticuladas. In 5.º Congresso Latino-americano para Métodos Computacionais em Engenharia, Salvador, 1984
- 50- TIMOSHENKO, S.P. Theory of Elasticity Stability. Nova Iorque, McGraw-Hill, 1936.
- 51- TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. Theory of Elastic Stability. Cingapura McGraw-Hill, 1961.
- 52- TIMOSHENKO, S.P. Teoria da Elasticidade. Trad. de Villaça, S.F.; Soriano, H.L.; Souza, H.S. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.

- 53- TRAHAIR,N. The Behaviour and Design of Steel Structures.  
Londres, Chapman and Hall, 1977.
- 54- VLASSOV,B.Z. Pieces Longues en Voiles Mincees. Paris,  
Éditions Eyrolles, 1962.
- 55- WINTER,G. Lateral Stability of Unsymmetrical I-Beams and  
Trusses in Bending, Transactions ,v. 108, p. 247. Nova  
Iorque, ASCE, 1943.